

變動單體法配合容許誤差觀念求解非線性規劃問題 —以淨水廠之最佳化設計為案例

吳明洋*

摘 要

工程上的最佳化設計，常會遭遇非線性規劃問題 (Nolinear Programming Problems)。而遇到此類問題時，往昔皆以線性函數估計法 (Piece-wise method) 化成線性來估算。此法使用上雖較方便，但其解終非直值 (exact solution)，且其分段數 (segments) 究應為多少始易接近直值，仍有疑惑。因為分段數愈多，雖愈準確，但也因此愈易增加整數變數 (Integer Variable) 及決策變數 (Decision Variables) 的數目，而使混合整數規劃 (Mixed Integer Programming) 模式龐大；增加電子計算機使用之困難及限制。

因此本文將研究應用 Paviani 與 Himmelblan 所修正發展的變動單體法 (flexible simplex) 配合容許誤差 (flexible tolerance) 概念求解有限制條件之非線性規劃問題。整個變動單體法大致由正常反射、延伸、折減、縮小及收斂測試等五個部分所組成。

本文另以現有之某淨水廠為案例，將其依各種條件要求及限制所建立之非線性規劃模式，藉本法所發展出來之電子計算機程式加以求解，並據以評估該淨水廠之系統功能。

* 行政院環保署水質保護處處長，國立海洋大學兼任副教授。

一、應用變動單體法求解目標函數為非線性之問題

變動單體法 (flexible simplex) 最早由 Nelder 與 Mead [1964] 提出，用以解決無限制條件之非線性規劃問題，其後 Paviani 與 Himmelblan [1969] 加以修改，配合容許誤差之概念，而用以求解一般有限制條件之非線性規劃問題。以下將先簡單介紹變動單體法，然後討論容許誤差概念。

(一) 基本概念

變動單體法之前身為單體法，由 Spendley、Hext 與 Himsworth 在 1962 年所提出，在 n 度空間中設定一等邊單體 (regular simplex)，由單體各頂點中函數值最差的頂點，經由其餘 n 個點所構成多邊體的中心反射一等長距離至一新點，這 n 個點與此新點形成一新的單體，如此一直反射，直到收斂於最佳解附近，再縮小此單體，繼續進行。Nelder 與 Mead [1964] 修改此方法為變動單體法，允許單體之邊長視情況而增加，以加速其收斂速率。

起始單體 $n+1$ 個頂點之座標可以矩陣 D 表示， D 為一 $n \times (n+1)$ 的矩陣，每一行 (Column) 代表一個頂點的座標，由此構成的單體為一等邊單體，其各邊長相等。令 x 為一起始點，則根據此點所決定的 D 為：

$$D = \begin{bmatrix} x_1 & x_1 + d_1 & x_1 + d_2 & x_1 + d_2 & \cdots & x_1 + d_2 \\ x_2 & x_2 + d_2 & x_2 + d_1 & x_2 + d_2 & \cdots & x_2 + d_2 \\ x_3 & x_3 + d_2 & x_3 + d_2 & x_3 + d_1 & \cdots & x_3 + d_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & x_n + d_2 & x_n + d_2 & x_n + d_2 & \cdots & x_n + d_1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$d_1 = \frac{t}{n\sqrt{2}} (\sqrt{n+1} + n - 1), \quad d_2 = \frac{t}{n\sqrt{2}} (\sqrt{n+1} - 1) \quad (2)$$

其中 t 為預先所設定兩頂點間之距離。在第 k 階段中，求出函數值最大之頂點 x_h^k 、次大之頂點 x_g^k 、最小之頂點 x_f^k 、以及 x_h^k 除外其他 n 個頂點所構成多邊體之幾何中心點 x_c^k ：

最大點 $x_h^k : f(x_h^k) : \max [f(x_1^k), f(x_2^k), \dots, f(x_{n+1}^k)]$

次大點 $x_g^k : f(x_g^k) : \max [f(x_i^k)]$
 $i = 1, 2, \dots, n+1$
 $i \neq h$

最小點 $x_f^k : f(x_f^k) : \min [f(x_1^k), f(x_2^k), \dots, f(x_{n+1}^k)]$

中心點 $x_c^k : x_c^k = x_{n+2}^k = \frac{1}{n} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq h}}^{n+1} x_i^k$ (3)

整個變動單體法大致由正常反射、延伸、折減、縮小、以及收斂測試等五個部分所組成，其執行步驟大致如下：

1. 反射 (reflection) : 由 x_h^k 經 x_c^k 反射至一新點 x_{n+3}^k

$$x_{n+3}^k = x_{n+2}^k + \alpha (x_{n+2}^k - x_h^k), \alpha > 0 \text{ 為反射係數。} \quad (4)$$

2. 收斂測試：如果單體夠小，則認為收斂，亦即

$$\sum_{i=1}^{n+1} [f(x_i^k) - f(x_c^k)] / (n+1) < \epsilon \text{ 則停止。} \quad (5)$$

3. 如果 $f(x_h^k) > f(x_{n+3}^k)$ ，表示此方向有利，執行 4. 的延伸部份。

如果 $f(x_h^k) > f(x_{n+3}^k) \geq f(x_f^k)$ ，則以 x_{n+3}^k 取代 x_h^k 回到 1. 重新開始，否則執行 5. 的折減部分。

4. 延伸 (expansion) : 將原反射長度增長

$$x_{n+4}^k = x_{n+2}^k + \gamma (x_{n+3}^k - x_{n+2}^k), \gamma > 1 \text{ 為延伸係數} \quad (6)$$

若 $f(x_h^k) > f(x_{n+4}^k)$ ，則以 x_{n+4}^k 取代 x_h^k ，回到 1. 重新開始，否則以 x_{n+3}^k 取代 x_h^k ，回到 1. 重新開始。

5. 折減 (contraction) : 減短原反射長度

$$x_{n+5}^k = x_{n+2}^k + \beta (x_h^k - x_{n+2}^k), 0 < \beta < 1 \text{ 為折減係數} \quad (7)$$

如果 $f(x_h^k) > f(x_{n+5}^k)$ ，以 x_{n+5}^k 取代 x_h^k ，回到 1. 重新開始，否則執行 6. 的縮小程序。

6. 縮小 (reduction) : 此時已在最佳點附近，應縮小單體再反射，以 x_c^k 為中心，縮小此單體：

$$x_i^k = x_i^k + 0.5 (x_i^k - x_c^k), i = 1, 2, \dots, n+1 \quad (8)$$

回到1.重新開和。

α 、 β 、 γ 三係數的數值影響此法之收斂速率，Nelder與Mead建議 $\alpha = 1$ ， $\beta = 0.5$ ， $\gamma = 2$ ；Paviani建議 $\alpha = 1$ ， $0.4 \leq \beta \leq 0.6$ ， $2.8 \leq \gamma \leq 3$ 。另外Nelder與Mead發現起始的步長 t 亦影響收斂速率，就不同函數而言有不同之最佳長度 t ，而通常 t 在1~3之間較理想。

(二)容許誤差概念

變動單體法之設計完全是針對沒有限制條件之問題，對於有限制條件之問題，若其限制式不含等號型式，則可行區域為一區間，可在此區間內採用變動單體法，每次反射若新點落於可行區域外，則可折返一段距離，以保持可行性，只要可行區域為凸性集合，與無限制條件之情形將無甚差異，Kao與Brodie〔1980〕以此種概念成功的解決一些森林管理上的問題。至若限制條件含有等號型式者時，Kao與Brodie之概念即無法採用，而Paviani與Himmelblau〔1969〕却提出一種有效之方法。對於一標準之非線性規劃問題：

$$\begin{aligned} \min. & f(x) \\ \text{s. t.} & g_i(x) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, I \\ & h_j(x) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, J \end{aligned} \quad (9)$$

先將可行區域擴大而得一近似可行區，如此即使原來為等號之限制條件目前也將成為一區域型之限制條件，然後在此近似可行區內求解，並逐步減小容許誤差而縮小近似可行區域的範圍，最後可得一滿足原限制式要求之最佳點。近似可行區域之大小由容許誤差所決定，先定義一判定可行性之函數 $T(x)$ ：

$$T(x) = \left[\sum_{i=1}^I u_i g_i^2(x) + \sum_{j=1}^J h_j^2(x) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (10)$$

$T(x)$ 之詳細情形在第一章中已探討過，這裡就不再贅述，若 $T(x) = 0$ ，則點 x 為可行解；若 $0 < T(x) \leq \Phi$ ， Φ 為容許誤差，則點 x 為近似可行解；若 $T(x) > \Phi$ ，則點 x 為非可行解，必須以此點為起始點，求解 $\min. T(x)$ ，至 $T(x) \leq \Phi$ ，即已進入近似可行區域，而可繼續正常之非線性求解步驟。基本上此配合容許誤差概念之變動單體法其執行之邏輯法則如圖1所示，幾項重點說明如下：

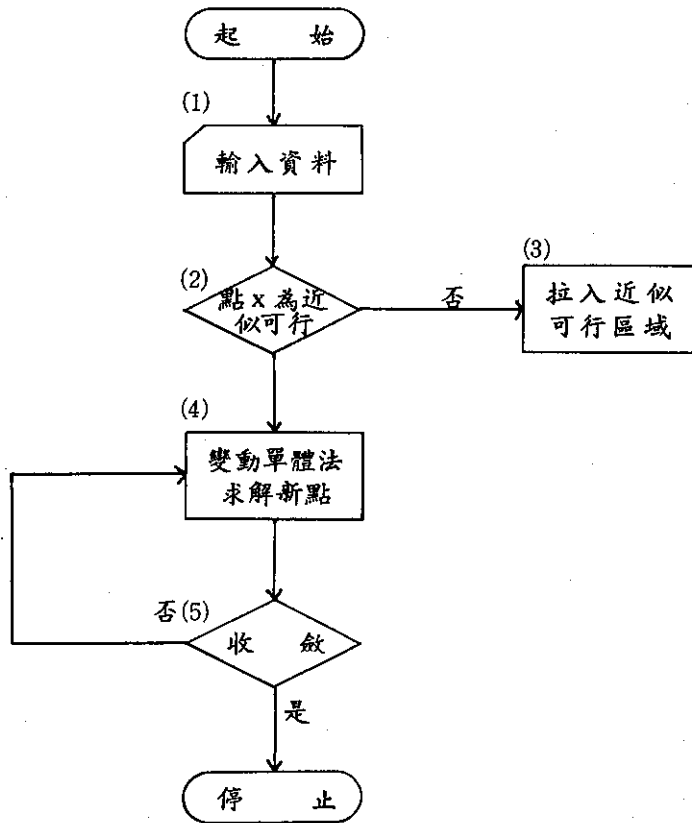


圖 1 配合容許誤差概念之變動單體法其解法流程圖

1. 輸入資料：

以自由格式輸入下列資料：

NX：變數個數

NC：等號限制式之個數

NIC：不等號限制之個數

SIZE：單體兩頂點間之距離 t

CONVER：收斂要求 ϵ

ALFA：反射係數 α

BETA：縮小係數 β

GAMA：延伸係數 γ

x^0 : 起始點之座標

其中除了 NX、NC、NIC、與 x^0 因題目而異外，其餘係數可固定於程式中。另外還需要以副程式之型式輸入目標函數與限制條件。有了起始點 x^0 ，即可根據(1)與(2)式設立一等邊單體，開始求解之步驟。

2. 測試可行性：

起始之容許誤差是根據等號限制式之個數以及單體之邊長所決定，亦即：

$$\phi^0 = 2 \times \text{SIZE} \times (\text{NC} + 1) \quad (11)$$

以後每一階段容許誤差之縮小情形則根據下式：

$$\phi^{k+1} = \min \{ \phi^k, \theta^k \} \quad (12)$$

其中 θ^k 如下式所定義，令 $r = \text{NX} - \text{NIC} + 1$

$$\begin{aligned} \theta^k &= \frac{\text{NIC} + 1}{r} \sum_{i=1}^r \| x_i^k - x_c^k \| \\ &= \frac{\text{NIC} + 1}{r} \left[\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{\text{NX}} (x_{ij}^k - x_{cj}^k)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (13)$$

若 $0 \leq T(x^k) \leq \phi^k$ ，則 x^k 為一近似可行解，否則 x^k 為非可行解。

3. 拉入近似可行區：

若點 x^k 為非可行解，亦即 $T(x^k) > \phi^k$ ，此時可求解 $\min. T(x)$ 以降低 $T(x)$ 之數值，待 $T(x) \leq \phi^k$ ，即進入近似可行區。 $\min. T(x)$ 為一無限制條件之非線性規劃問題，可採用任何適當之方法求解，Paviani 與 Himmelblau 採用變動單體之方法求解。

4. 變動單體法求解新點：

此部分為 Pavian 與 Himmelblau 提出新法之主體。在第 k 階段中，決定目前單體各頂點之最大點 x_m^k 、最小點 x_n^k 、以及 x_m^k 除外各點之中心點 x_c^k (3)式，將(9)式之標準非線性規劃問題轉換為：

$$\begin{aligned} \min. & f(x) \\ \text{s.t.} & T(x) \leq \phi^k \end{aligned} \quad (14)$$

以修改之變動單體法求解此問題，其重要步驟如下：

- (1) 藉 $x_{n+3}^k = x_{n+2}^k + \alpha (x_{n+2}^k - x_n^k)$ 而將點 x_n^k 經由中心點 $x_{n+2}^k = x_n^k$ 反射至一新點 x_{n+3}^k ，若 x_{n+3}^k 為一非可行解，則以 3. 之拉入近似可行區中所述方法拉入近似可行區，計算 $f(x_{n+3}^k)$ 。
- (2) 若 $f(x_{n+3}^k) \leq f(x_n^k)$ ，則以(6)式延伸此變動單體至一新點 x_{n+4}^k （若 x_{n+4}^k 為一非可行解，則必須拉入近似可行區域），計算 $f(x_{n+4}^k)$ 。若 $f(x_{n+4}^k) < f(x_n^k)$ ，則以 x_{n+4}^k 取代 x_n^k ，然後執行 5. 之收斂測試；否則以 x_{n+3}^k 取代 x_n^k ，然後執行 5. 之收斂測試。
若 $f(x_{n+3}^k) > f(x_n^k)$ ，此時若 $f(x_{n+3}^k) < f(x_g^k)$ ，則以 x_{n+3}^k 取代 x_n^k ，然後執行 5. 之收斂測試；若 $f(x_g^k) < f(x_{n+3}^k) \leq f(x_n^k)$ ，則以 x_{n+3}^k 取代 x_n^k ，然後執行(3)；若 $f(x_{n+3}^k) > f(x_n^k)$ ，則執行(3)。
- (3) 根據(7)式折減單體至一新點 x_{n+5}^k （若 x_{n+5}^k 為一非可行解，則拉入近似可行區域），計算 $f(x_{n+5}^k)$ 。若 $f(x_{n+5}^k) < f(x_n^k)$ ，則以 x_{n+5}^k 取代 x_n^k ，並執行 5. 之收斂測試；否則執行(4)之縮小單體部分。
- (4) 以(8)式縮小單體，然後執行 2. 之可行性測試部分。

5. 收斂測試：

當 $\phi^k \leq \epsilon$ ，則表示尋求成功而終止計算。在程式中取 $\epsilon = 10^{-5}$ 。傳統上測試收斂必須由可行性以及穩定性雙方面著眼，此處只要求 $\phi^k \leq \epsilon$ ，亦即只要求點 x 之可行性。實際上 ϕ^k 與 θ^k 有關，當 ϕ^k 極小時 θ^k 亦趨近於極小，而 θ^k 為單體各頂點與中心點之平均距離， θ^k 極小表示目前之單體亦為極小，下一次之反射自然走不了多遠而滿足穩定性之要求。

以上為此法各重要階段之說明。由於(13)式之 θ^k 為單體各頂點與中心點之平均距離，雖然在求解過程中有時會增大，但一般而言將漸趨減小，又(12)式為一遞減函數，隨著求解過程將逐漸減小：

$$\lim_{x \rightarrow x^*} \phi^k = 0 \quad (15)$$

因而此容許誤差 ϕ 在求解過程中，不但可做為判定可行性之標準，亦可用以判斷是否已達收斂，由(15)式知此法確實可達收斂。

(三) 實例說明

前面兩節將變動單體法配合容許誤差概念求解有限制條件非線性規劃問題做了詳

細的說明，這裡再舉一實例說明其求解過程，以求對此解法能有更進一步之了解。

[例 1] $\min. \log x_1 - x_2$

$$\text{s. t. } x_1^2 + x_2^2 - 4 = 0$$

$$x_1 \geq 0$$

00

起始點為 $x^0 = [2 \ 2]$ ，最佳點為 $x^* = [1 \ \sqrt{3}]$ 。有關變數輸入部分其數值分別為：NX = 2，NC = 1，NIC = 1，SIZE = 1，CONVER = 10^{-5} ，ALFA = 1，BETA = 0.5，GAMA = 2。有關副程式輸入目標函數以及限制式部分則如以下 FORTRAN 程式所示：

```
SUBROUTINE PROBLEM ( INQ )
  DIMENSION X ( 50 ), X1 ( 50, 50 ), X2 ( 50, 50 ), R ( 100 ), SUM ( 50 ),
  $ F ( 50 ), SR ( 50 )
  COMMON / 1 / NX, NC, NIC, STEP, ALFA, BETA, GAMA, IN.
  $ INF, FDIFER, SEQL, K1, K2, K3, K4, K6, K7, K8, K9, X, X1.
  $ X2, R, SUM, F, SR, FOLD
  COMMON / 2 / LFEAS, L5, L6, L7, L8, L9, R1A, R2A, R3A.
  $ IFEA
  IF ( INQ - 2 ) 1, 2, 3.
1 CONTINUE
  R ( 1 ) = X ( 1 ) ** 2 + X ( 2 ) ** 2 - 4
  RETURN
2 CONTINUE
  R ( 2 ) = X ( 1 ) - 1
  RETURN
3 CONTINUE
  R ( 3 ) = ALOG 10 ( X ( 1 ) ) - X ( 2 )
  RETURN & END
```

以 Himmelblau [1972] 書中所附之電腦程式執行此問題，可得表 1 之結果，而圖 2，則為以圖形表示之情形。

表 1 [例 1] 以變動單體法執行之情形

替代期	x 座標		目標函數	T(x) 值
0	2.000	2.000	-1.699	4.000
1	1.684	1.826	-1.599	2.170
12	0.997	1.735	-1.736	0.004
16	1.000	1.732	-1.732	0.000
20	1.000	1.732	-1.732	0.000

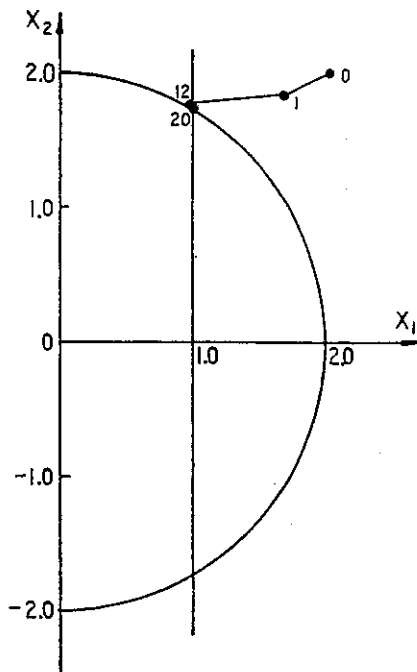


圖 2 以變動單體法求解 [例 1] 之圖解說明

Himmelblau 程式中並未將每一替代期之結果均印出，表 1 中所列之結果即為實際所印出之部分，並未經刪減。

對於一定必須滿足之限制條件，例如例題中 $\log x_1$ 中之 x_1 必須為正值，否則無意義，變動單體法之處理方式與可行方向法之處理方式相同，均是將限制條件加上容許誤差之數值，以使近似可行區域滿足原來之限制條件。例如 $g_1(x) \geq 0$ 之限制式，

如果一定必須滿足，則可改寫為：

$$g_i(x) - \phi \geq 0 \quad (17)$$

其中 ϕ 為當時之容許誤差。如此，只要 x 在近似可行區域內就(17)式之限制條件而言，則必然滿足 $g_i(x) \geq 0$ 之要求。

二、案例淨水廠之實況及模式

(一)淨水廠的處理流程

本研究之淨水廠處理流程如圖 3 所示：

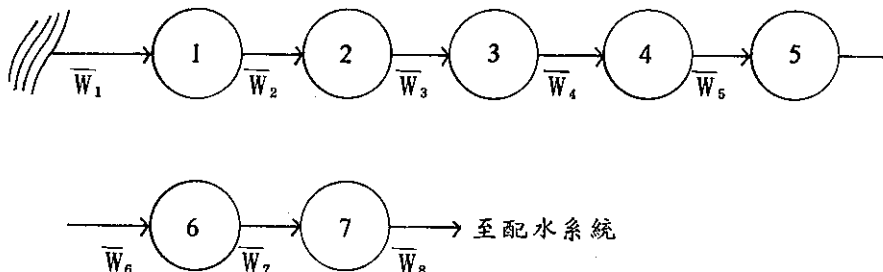


圖 3 淨水廠處理流程圖

此處

W_j ：為進入 j 處理單元，水質參數的向量 (Vector of water quality parameters into process "j")

1：原水加氯 (預加氯)，(pre-chlorination)

2：加明礬 (Alum feeders)

3：快混池 (Rapid mixing basin)

4：膠凝池 (Flocculation basin)

5：傾斜 (管) 沉澱池 (Tube settler sedimentation)

6：改良綠葉型快濾池 (Modified-greenleaf type filter)

7：清水加氯，（後加氯）（Post-chlorination）

又決策變數（decision variable）代表的意義及單元尺寸（unit size）為：

x_1 ：原水加氯之加氯率（公斤／小時）

x_2 ：明礬加藥率（公斤／小時）

x_3 ：快混池之容積（立方公尺）

x_4 ：膠凝池之容積（立方公尺）

x_5 ：傾斜管沉澱池之表面積（平方公尺）

x_6 ：改良綠葉型快濾池之表面積（平方公尺）

x_7 ：清水加氯率（公斤／小時）

(二)限制式

在建造及爾後操作維護總成本為最低的目標下，統合各處理設施的設計規範、處理效率、水質條件及操作條件等來構成限制式。

進水水質事實上有其隨機之特性並非恒定值（constant level），因此依上敘原則所推導而得之限制式，有其機率項：

1. 混凝時總鹼度需求：

$$-\frac{19200}{Q} x_1 - \frac{9840}{Q} x_2 \geq 35 - F_{A_1}^{-1}(\alpha) \quad (18)$$

2. 防腐蝕關係式：

$$-\frac{32314}{Q} x_1 - \frac{10669}{Q} x_2 - \frac{32314}{Q} x_7 \geq 5.5 - 0.133 F_{A_1}^{-1}(\alpha) + F_{C_1}^{-1}(1 - \alpha) \quad (19)$$

同上述之道理，當為 $\max(C_1)$ 時，則其反函數為 $F_{C_1}^{-1}(1 - \alpha)$

當為 $\min(A_1)$ 時，則其反函數為 $F_{A_1}^{-1}(\alpha)$

3. 混凝時之明礬加量：

$$\frac{x_2}{0.00043 Q} \geq \log \{ F_{T_1}^{-1}(1 - \alpha) \} + 0.281 \quad (20)$$

4. 出水濁度要求：

$$k_T \frac{84}{Q} x_5 + \frac{28}{Q} x_4 + \frac{5.97}{Q} x_3 + 1.4 x_6 \geq \log \{ F_{T1}^{-1} (1 - \alpha) \} + 364 \quad (21)$$

5. 出水大腸菌數要求：

$$0.055 \frac{84}{Q} x_5 + 0.25 \frac{84}{Q} x_4 + k_B \frac{3.5}{Q} x_6 - 0.5 x_6 \geq \log \{ F_{B1}^{-1} (1 - \alpha) \} - 433.25 \quad (22)$$

6. 快濾池水力貫穿之考慮：(modified greenlaef type)

$$x_6 \geq 0.00563 Q \quad (23)$$

7. 加氯消毒：

$$x_1 \geq \{ F_{D1}^{-1} (1 - \alpha) \} \cdot Q [(10^3) / 24] \quad (24)$$

$$x_7 \geq \{ F_{D1}^{-1} (1 - \alpha) \} \cdot Q [(10^{-3}) / 24] \quad (25)$$

8. 停留時間之考慮：

$$x_3 \geq 104$$

$$x_4 \geq 3125$$

$$x_5 \geq 1800$$

(26)

9. 非負條件：

$$x_j \geq 0 \quad \forall j, j = 1 \sim 7$$

$$P_r \{ A_1 < 35 + \frac{19200}{Q} x_1 + \frac{9840}{Q} x_2 \} \doteq \alpha \quad (27)$$

$$F_{A1} (35 + \frac{19200}{Q} x_1 + \frac{9840}{Q} x_2) \leq \alpha \quad (28)$$

但限制式中如包含了機率項，無法求解必需依據水廠水質資料，建立各水質參數的累積分佈函數 (cumulative distribution function) 圖，再依此 CDF 對或然率之轉換原則，轉化成確定式 (certainty form)。則限制式又變成線性關係。

α (機率值) 由設計者依經驗及過去操作紀錄，給予適當值。

(三) 目標函數

由於目標函數並不包含機率項，不必經過任何轉化程序。

1. 依實際成本函數關係所得之目標函數：

$$\begin{aligned} \min Z = & 0.572 x_1 - 0.00289 x_1^2 + 0.0422 x_2 - 0.0000449 x_2^2 + 0.00386 x_3 \\ & + 0.000136 x_3^2 + 0.00775 x_4 - 0.00000052 x_4^2 + 0.001449 x_5 \\ & - 0.000000063 x_5^2 + 0.0148 x_6 - 0.000025 x_6^2 + 0.844 x_7 \\ & - 0.00406 x_7^2 \end{aligned} \quad (29)$$

三、電子計算機求解結果

(一) 變動單體法配合容許誤差觀念之電子計算機求解

1. 電子計算機程式：

乃由文獻中求得，經過測試及修正後，發現本例決策變數僅 7 個，尚可以得到收斂，而獲得最佳解。

2. 本法之流程圖：

如圖 1 所示。又有關資料輸入等各項求解步驟如文中前段所述。

3. 求解結果：

表 2 利用本法求解，工程經濟分析上採用現值法

目標函數式	設計年限	25年	$\begin{aligned} \min z = & 0.572 x_1 - 0.00289 x_1^2 + 0.0422 x_2 - 0.0000449 x_2^2 + 0.00386 x_3 \\ & + 0.000136 x_3^2 + 0.00775 x_4 - 0.00000052 x_4^2 + 0.001449 x_5 - \\ & 0.000000063 x_5^2 + 0.0148 x_6 - 0.000025 x_6^2 + 0.844 x_7 - 0.00406 x_7^2 \end{aligned}$							
設計年限	水質機率之考慮	目標函數值 (\$10^6)	決策變數最佳解							備註
			x_1 (kgs/hr)	x_2 (kgs/hr)	x_3 (M ³)	x_4 (M ³)	x_5 (M ²)	x_6 (M ²)	x_7 (kgs/hr)	
25	定率性	57.69866	31.25	181.4	104	3125	1800	844.5	5	$\alpha = 0.25$
	序率性	55.60036	31.25	109.4	104	3925	1800	844.5	5	

表 3 原廠修正流程經電子計算機求解結果

決策變數 設計參數 機率值 (α)	X_1 前加氣率 (公斤/時)	X_2 加明礬率 (公斤/時)	X'_3 加石灰率 (公斤/時)	X_3 快混池容積 (M ³)	X_4 膠凝池容積 (M ³)	X_5 沉澱池面積 (M ²)	X_6 快濾池面積 (M ²)	X_7 後加氣率 (公斤/時)
0.01	31.25	172.8	91.26	104	3125	1800	844.5	5
0.02	31.25	169.18	89.50	104	3125	1800	844.5	5
0.05	31.25	160.3	84.73	104	3125	1800	844.5	5
0.10	31.25	147.12	78.07	104	3125	1800	844.5	5
定率性	31.25	181.4	92.68	104	3125	1800	844.5	5

(二)求解結果及討論

1. 案例研討係以桃園地區某淨水廠為之，模式中代入該廠有關之各項水質及操作資料，依上數方法加以求解，而有如下之結果：

- (1) 該廠只在 $\alpha = 25\%$ ，即 $1 - \alpha = 0.75$ 時方有解，意表該廠利用傳統設計規範為基礎似有缺失，只獲得 75% 之信賴度。如表 3 所示。
- (2) 經評估後，發現依原設計之流程來處理原水，則出水水質必具腐蝕性。因此吾人重新更改其處理流程，於原水加氯，加明礬後，即增加一個石灰之加注單元 X_1' ，以調合水中之鹼度。據此將修正流程後所推導之數學模式，仍應用本法求解。獲得信賴度 99% 之結果，如表 3 所示。
2. 變動單體法在無限制條件下，一般而言單體容易退化，且效率不十分理想。在有限制條件下，當變數超過十個後，效率低且可能失效，且執行時間較長。
3. 各種方法中，以乘數法最佳，可行方向法次之。本研究主要是分年進行探討，加以分析比較。

參考文獻

1. Himmelblau, D.M., Applied nonlinear programming, McGraw Hill, 1972.
2. Kao, Chiang and J.D. Brodie, " Simultaneous optimization of thinnings and rotation with continuous stocking and entry intervals ", Forest Science 26(3): 338-346, 1980.
3. Nelder, J.A. and R. Mead, " A Simplex method for function minimization ", Computer J. 7 : 308-313, 1964.