自來水多水源的最佳聯合操作

The Optimal Joint Operation of Multiple Raw Water Sources

吳明洋*撰

壹、前言

基於安全及信賴性考量，世界上大部分地區的自來水系統，大都採用二個以上的水源來聯合操作，以滿足水量需水，在信賴性及經濟效率的目標追求上與單一水源並無二致。

本文將以美國馬里蘭州，巴爾的摩市（Baltimore），蒙太貝洛淨水廠（Montebello treatment plant）爲案例，以做爲最佳化操作模式建立之依據。其水源分別來自洛克拉芬水庫（Loch Raven reservoir）的供水（release）及沙斯魁漢娜河（Susquehanna river）的抽水。水庫地理位置較高，却具有入流量等隨機特性因素，而河川取水雖具高安全性，却因地勢低必需藉助抽水，而有了抽水成本之限制。決策者的目標是要能決定聯合操作規則（joint operation rule）以獲致最佳系統操作。

本研究將以線性規劃的理論及方法來建立最佳化數學模式。在一定操作期水庫不能有不必要之溢洩（spillage）下，以河川抽水量最小化爲其目標函數（objective function）。而以水庫操作特性、河川抽水特別條件及其它因素爲結構限制式（structural constraints）。

在模式之建立上又依是否考慮一些因素的隨機特性（random）與否，而分別建立定率性（deterministic）及序率性（stochastic）模式。研究中將以機遇限制線性規劃模式（Chance-constrained Lp model）來建立序率性模式。

此外尚將發展一套方法論，應用序率優選模式以求得水庫在供水目標下的供水可靠度（reliability of supply）。

貳、巴爾的摩市原水水源

隨著都市人口的增加，巴爾的摩市的原水需水量已由 1930 年的 115.04^{MGD} 到 1967 年的 242.68^{MGD}，1987 年的需水量達 320^{MGD}。巴城北方有三個水庫，西北方的自由水庫（Liberty reservoir）單獨供應給亞契柏頓淨水廠（Ashburton treatment）。北方有二個水庫，沿著火藥河（Gunpowder river）上游的是秀麗水庫（Pretty reservoir），主要功用在調節下游洛克・拉芬水庫的水位。

洛克拉芬水庫的水經由 144 吋的隧道導入巴城的蒙太貝洛淨水廠，其處理能力爲 240^{MGD}

※國立台灣海洋學院河海工程系（所）副教授

。由於淨水廠的高程僅比水庫滿水位低20英呎，所以設有蒙太貝洛抽水站以便在水庫貯水量減少時，仍得以抽水供應足夠的需水量。

爲了擴充原水來源，巴城在1965 年又建有38英哩長，108 吋的管線，由東北方的沙斯魁漢娜河抽水至蒙太貝洛淨水廠。有關平面配置如圖 2-1 所示。

決策者的目標是決定出各水源的最佳聯合操作規則，以便得到全系統的良好操作。

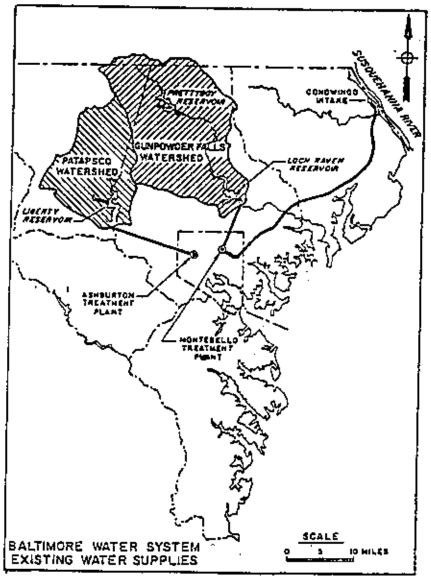

圖 2-1　巴爾的摩原水水源平面圖

叁、線性規劃模式之建立

本文中將簡化整個系統，只考慮蒙太貝洛淨水廠的二個原水水源聯合操作。一個地勢稍高的水庫放水以及另一個地勢較低必須藉助抽水機的河川抽水。

在模式之建立上將依是否考慮一些因素的隨機特性(random)與否而分別建立定率性 (determinstic) 模式及序率性 (stochastic) 模式。

一、定率性線性規畫模式

吾人的目標是要使一些特別月份的抽水總量爲最小，但水庫不能有不必要的溢洩 (spillage) 等水量損失。水庫的入流序量將 (inflow sequence) 先予指定。

首先定義一些符號的名稱及其意義如下：

N：在本模式中所考慮的全部月份數。

i ：$i = 1, 2 \cdots\cdots N$，月份之標示序。

j ：一年內之同份序 $j = 1, 2, \cdots\cdots 12$，又 $j = i * (\text{modulo } 12)$。

X_i：水庫放水量＝取水量＋溢洩量，（百萬加侖／月），在第 i 個月份。

S_i：在第 i 月份末，水庫剩餘之蓄水量，（百萬加侖）。

I_i：在第 i 月份的水庫平均月進流量，（百萬加侖）。

S_{min}：在整個操作期中，吾人設定的最小水庫蓄水量，也可以說是蓄水量下限，（百萬加侖。

C：水庫容量，（百萬加侖）。

h ：6～9月夏季中之任一個月，由河中抽水的每月最大水量，（百萬加侖）。

a ：分數，抽水機曲線的形狀因素，$0 \leq a \leq 1$，由決策者決定。

y_i：在 i 月中（某一個月中）抽水之總量，（百萬加侖）。

D_j：在一年中第 j 個月裏之總需水量（百萬加侖）。

H_j：用於水庫操作、放水的決策變數，在每一年的第 j 個月份其值是相同的。（百萬加侖）

bj：用於河川抽水決策的決策變數（百萬加侖／月）。

PIPE：河川抽水容量。

目標函數係使全部操作期限內的每月抽水量總和爲最小，因此模式可以寫成：

$$\min \quad z = \sum_{i=1}^{N} y_i \quad \text{此爲目標函數} \qquad (3.1)$$

以及下列之限制式：

1.連續性（continuity）的維持，亦即滿足水平衡方程式

$$S_i = S_{i-1} + I_i - X_i \qquad (3.2)$$

2.利用Charles Revelle發展的線性放水規則（Linear decision rule, LDR）作爲水庫操作的決策規則（decision rule）〔1〕，則

$$X_i = S_{i-1} + H_j \qquad (3.3)$$

經由上式隨機變數X_i係以另一隨機變數S_{i-1}及決策變數H_j之和來表示，而H_j 係表示每一年內第j期（月份）之運轉規則參數（Opercitingpolicy parameter），其值可正可負。在任一年內之同一月份此値將重覆顯現。由於j＝1，2，……12，所以在本LP模式中將有12個H_j解值。每一個月的計劃放水量將可由線性放水規則來獲知。

3.抽水將採用一種特別條件，即

$$y_i = b_j \qquad (3.4)$$

在給予的一種放水策略下，b_j（j=1，2，……12）將會比實際需要的抽水成本高，亦即與實際之操作有一些偏差，此種保守性就變成了模式中引入的安全因素了。

4.在夏季抽水時某月份（期）抽水之總量亦必須給予上限

$$y_i \leq h \qquad i = \text{夏季月份} \qquad (3.5)$$

5.而在非夏季月份，抽水量需給予下限，而以夏季抽水量h乘上一個分數a來設定，a値指抽水機曲線的形狀因素，$0 \leq a \leq 1$，其値由決策者決定。

$$y_i \geq ah \qquad i = \text{非夏季月份} \qquad (3.6)$$

（3.5）及（3.6）式形成了動力消耗曲線的形狀（Shape of the power consumption curve），同時目標函數就是求取曲線底下之面積趨於最小。

6.任何時期水庫之蓄水量必須要小於或等於水庫容量

$$S_i \leq C \qquad (3.7)$$

7.在任何時期水庫放水量不可超過有效水量（availability of water）

$$X_i \leq S_{i-1} + I_i - S_{min} \qquad (3.8)$$

吾人若將（3.2）式代入式（3.7）中則可簡化成

$$S_i \geq S_{min} \qquad (3.8.1)$$

8.在任何時期，水庫的放水量加上抽水量必須大於或等於當時的需水量

$$X_i + y_i \geq D_j \qquad (3.9)$$

9. $$y_i \leq PIPE \qquad (3.10)$$

如果線性放水規則確實掌握了水庫的放水運轉則將式（3.3）代入式（3.2）中可得：

$$S_i = I_j - H_j \qquad (3.11)$$

利用此式及其它操作規則，吾人可以將整個模式改寫成：

$$\min \quad z = \left(\frac{N}{12}\right) \sum_{j=1}^{12} b_j \qquad (3.12)$$

s.t.

$$b_j - h \quad \leq 0\ ,\ j = 6, 7, 8, 9 \qquad (3.13)$$

$$b_j - ah \quad \geq 0\ ,\ j = 1, 2, \cdots\cdots, 12 \qquad (3.14)$$

$$H_j \geq I_j - C\ ,\ i = 1, 2, \cdots\cdots, N \qquad (3.15)$$

$$H_j \leq I_j - S_{min}\ ,\ i = 1, 2, \cdots\cdots, N \qquad (3.16)$$

$$-b_j + H_{j-1} - H_j \leq I_{j-1} - D_j\ ,\ i = 1, 2, \cdots\cdots, N \qquad (3.17)$$

$$b_j \quad \leq PIPE\ ,\ i = 1, 2, \cdots\cdots, N \qquad (3.18)$$

$$H_{j-1} - H_j \quad \leq I_{i-1}\ ,\ i = 1, 2, \cdots\cdots, N \qquad (3.19)$$

式（3.19）之加入，係為了保證水庫放水量X_i的非負特性，以及重改寫的模式中已不再有X_i之變數出現之故。

目標函數，即式（3.12）如寫成下式對求所LP問題並無任何影響，故式（3.12）可以改寫成：

$$\min \ z = \sum_{j=1}^{12} b_j \qquad (3.20)$$

以上重寫的模式已特意安排，讓所求未知變數置於不等式的左邊，而已知數則置於右邊。對於有20年期限的水庫入流序量（inflow sequence）而言，將會有 948 條限制式；目前之電子計算機雖容量大增效率又高，但一次處理如此大之 LP 模式仍不經濟，吾人必須設法加以簡化。

就以式（3.16）而言，20年期限內每年的同一個月份 j ，其所求之值都相同，因此可以把 240 個限制式簡化成12個限制式，同理對各限制式進行簡化，將使 948 條限制式轉化成僅 72 條限制式之模式，而利於計算機之求解。

二、序率性線性規劃模式

對本 LP 問題若欲表示其中某些變數具有隨機特性，則將採用機遇限制模式（Chanceconstrained programming)〔2〕來表示。Charles ReVelle Joeres and Kirby〔1〕最早將其應用到水庫的設計及操作上，國內吳明洋〔3〕亦曾應用於淨水廠之最佳化設計上。

因目標函數並不具隨機特性，因此仍適用式（3.12）或（3.11）

$$\min \ z = \sum_{j=1}^{12} b_j \text{，或} \min z = \sum_{i=1}^{N} y_i$$

限制式將各依特性分別寫成序率性模式：

式（3.7）變成 $P_r(S_i \leq c) \geq q_1 \qquad (3.21)$

亦即（3.15）變成 $P_r(H_j \geq I_i - c) \geq q_1 \qquad (3.22)$

此處 I_i 表示對某一個時期（月份）而言，累積或然率分布圖上的一個隨機變數（水庫進流量）。

式（3.15）中，H_j 及 C 都是常數，I_j 是隨機變數，同理式（3.16）可以寫成

$$P_r(H_j \leq I_j - S_{min}) \geq q_2 \quad \cdots\cdots (3.23)$$

式（3.17）可以寫成

$$P_r(-b_j + H_{j-1} - H_j \leq I_{j-1} - D_j) \geq q_3 \quad \cdots\cdots (3.24)$$

式（3.19）可以寫成

$$P_r(H_{j-1} - H_j \leq I_{j-1}) \geq q_4 \quad \cdots\cdots (3.25)$$

其它限制式，即式（3.13），式（3.14）及式（3.18）原即屬定率式自不必改寫成序率式。可經由圖 3-1 來轉換成確定等式（equivalent certainey），再以一般LP方法藉電子計算機之助而求解。

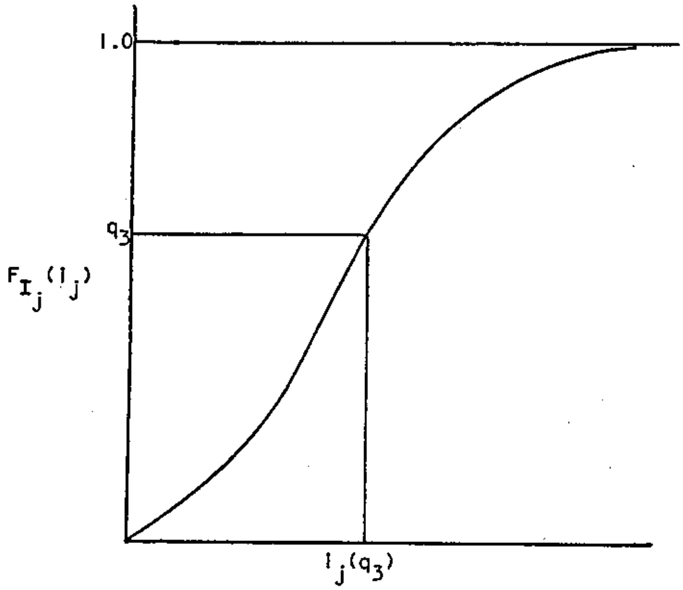

圖 3-1　j 月份累積的水庫入流量分佈

事實上因模式需求得可行解域中之最佳解，此處應定義：

$$q_1 = q_2 = q_3 = q_4$$

肆、水庫供水可靠度之推求

一、模式之建立

為考慮水庫進流量的隨機特性，吾人仍將採用機遇限制LP模式來表示

$$\min \quad K \quad \cdots\cdots (4.1)$$

s.t.

$$P_r[S_t \leq K] \geq 0.99 \;, \forall t \quad \cdots\cdots (4.2)$$

$$P_r[D_t^R \leq 0.2\, T_t^R] \geq P \;, \forall t \quad \cdots\cdots (4.3)$$

$$P,\ S_t,\ D_t^R \geq 0 \quad \cdots\cdots (4.4)$$

式中

S_t：在 t 時間初的蓄水量

K：水庫有效容量

D_t^R：缺水量

T_t^R：原水需水量

P：可靠度

應用 D.P Louck 對 ReVelle 原始 LDR 修正之規則〔4〕

即 $R_t = S_t + \lambda Q_t - b_t$ ……………………………… (4.5)

式中：

λ：一個常數，介於 0 ～ 1 之間

Q_t：第 t 期的水庫進水量

b_t：決策變數

而 $S_{t+1} = S_t + Q_t - R_t$ ……………………………… (4.6)

與式 (4.5) 比較後，發現

$S_{t+1} = (1-\lambda) Q_t + b_t \;, \forall t$ ……………………………… (4.7)

即 $S_t = (1-\lambda) Q_{t-1} + b_{t-1} \;, \forall t$ ……………………………… (4.8)

式 (4.8) 代入式 (4.5) 中，得

$R_t = (1-\lambda) Q_{t-1} + \lambda_t Q_t + b_{t-1} - b_t \;, \forall t$ ……………………………… (4.9)

在式 (4.3) 中，若令 E_t^R 表示多餘放水量，則

$P_r [D_t^R - E_t^R \leq 0.8 T_T^R] \geq P \;, \forall t$ ……………………………… (4.10)

因 $R_t = T_t^R - D_t^R + E_t^R \;, \forall t$ ……………………………… (4.11)

與 (4.9) 式比較，消去 R_t 以後，可得：

$D_t^R - E_t^R = T_t^R - (1-\lambda) Q_{t-1} - \lambda Q_t - b_{t-1} + b_t \;, \forall t$ ……………………………… (4.12)

則 (4.3) 式變成

$P_r [T_t^R - (1-\lambda) Q_{t-1} - \lambda Q_t + b_t - b_{t-1} \leq 0.2 T_t^R] \geq P \;, \forall t$ ……… (4.13)

亦即 $P_r [b_t - b_{t-1} \leq (1-\lambda) Q_{t-1} + \lambda Q_t - 0.8 T_t^R \;, \forall t$ ……………………………… (4.14)

轉換成確定等式，得

$$b_t - b_{t-1} \leq (1-\lambda)\, q_{F,T-1}^{(1-P)} + \lambda\, p_{F,t}^{(1-P)} - 0.8 \hat{T}_t^R \;, \forall t \quad \cdots\cdots (4.15)$$

上式中 $\hat{T}_t^R$：表示計到需水量

$q_{F,t}^{(1-P)}$：在 t 時間內，洛克拉芬水庫流量小於或等於 $q_{F,t}^{(1-P)}$ 的機率值爲 P 者。

若取 $\lambda = 1$，則

$R_t = Q_t + b_{t-1} - b_t$ ……………………………… (4.16)

且 $S_t = b_{t-1}$ ……………………………… (4.17)

模式變成

min K

s.t.

$$b_{t-1} \leq K \quad , \forall t \quad \cdots\cdots (4.18)$$

$$b_t - b_{t-1} \leq q_{F,t}^{(1-P)} - 0.8\,\hat{T}_t^R \quad , \forall t \quad \cdots\cdots (4.19)$$

$$b_t \geq 0 \quad , \forall t \quad \cdots\cdots (4.20)$$

若$\lambda=0$，則

$$R_t = Q_{t-1} + b_{t-1} - b_t \quad , \forall t \quad \cdots\cdots (4.21)$$

且 $$S_t = Q_{t-1} + b_{t-1} \quad , \forall t \quad \cdots\cdots (4.22)$$

模式變成：

$$\min \quad K$$

s.t.

$$K - b_{t-1} \geq q_{t-1}^{0.99} \quad , \forall t \quad \cdots\cdots (4.23)$$

$$b_t - b_{t-1} \leq q_{F,t}^{(1-P)} - 0.8\,\hat{T}_t^R \quad , \forall t \quad \cdots\cdots (4.24)$$

$$b_t \geq 0 \quad , \forall t \quad \cdots\cdots (4.25)$$

伍、結論與建議

1.所謂機遇限制線性規畫模式，是以機率的觀念加諸於限制條件中，以控制該限制式的可靠度，亦即在此可靠度下，求得該模式的最佳解。本模式發展很早，應用至今已屆三十餘年，效果仍然甚佳，是否流於保守，完全鑑於決策者的使用及機率值的決定。

2.線性放水規則自ReVelle等發展至今，已經多人多次的改進，概可分成四大類：

(1) $R_t = S_{t-1} - b_t \quad , \forall t$

名之爲「單一規則 1 」，乃ReVelle 等人所提出的原始LDR〔1〕。

(2) $R_t^{ij} = S_{t-1}^{j} - b_t^{i} \quad , \forall t$

名之爲「多重規則 1 」，乃Houck 所提的LDR〔5〕。

(3) $R_t = S_{t-1} + Q_t - b_t \quad , \forall t$

名之爲「單一規則 2 」，乃Loucks 所提的LDR〔4〕。

(4) $R_t^{ij} = S_{t-1}^{j} + Q_t^{i} - b_t^{i} \quad , \forall t$

名之爲「多重規則 2 」，乃Stedinger〔6〕及台灣的林志雄所提的LDR〔7〕。

由於本研究中僅考慮單一水庫之操作，使用ReVelle的原始LDR來建立模式比較清晰易懂。

5.林所提出的LDR〔8〕，融合了Loucks 所提LDR所需水庫容量較小以及Houck 所提LDR多重放水規則較具彈性的優點，實際上可以考慮採用此類LDR 。

6.本文旨在提出一種方法論，以爲相關研究之參考。

陸、誌謝

本文係美國馬里蘭州巴爾的摩市蒙太貝洛淨水廠委請約翰霍浦金斯大學地理及環工研究所所做的研究計劃，亦是作者滯美時所參予的研究專題之一，承蒙Dr .Charles ReVelle及Dr . Huge Ellis 指導並同意就本人所負責部分在台先予發表，特此申謝。

柒、參考文獻

1. Charles ReVelle, Erhard Jores & William Kirby,"The Linear Decision Rule in Reservoir Management and Design" : 1. Development of the Stochastic Model", Water Resource Res., 5(4) August 1969.
2. Daniel P. Loucks, Jery R. Stedinger & Douglas A. Haith "Water Resource System Planning and Analysis", Prentice Hall, Inc., New Jersey, U.S.A.
3. 吳明洋，" 淨水廠的系統化設計及其操作管理 " ，文笙書局印行，台灣台北，民國77年 5 月初版。
4. Daniel P. Loucks, "Some Comments on Linear Decision Rule and Chance Constraints", Water Resource Res., 6(2), April 1970.
5. Mark H. Houck,"A Chance Constrained Optimization Model for Reservoir Design and Operation", Water Resource Res., 15(5), October 1979.
6. Jerry R. Stedinger,"the performance of LDR Models for preliminary Design and Reservoir Operation", Water Rosource Res., 20(2), February 1984.
7. 林志雄，" 線性放水規則用於台灣水庫設計之可行性研究」，淡江大學土木研究所碩士論文，民國73年 6 月。