

可行方向法配合容許誤差觀念求解非線性規劃問題

Method of Feasible Direction with Some Flexible Tolerance for Solving Nonlinear Programming Problem

吳 明 洋 * 撰

一、前 言

工程上的最佳化設計，常會遭遇非線性規劃問題(Nonlinear Programming Problems)。而遇到此類問題時，多數以線性函數估計法(Piece-wise method)化成線性來估算。但此法使用雖然方便，遇不同之問題時，其分段數(Segments)究應為多少方易使解值接近真值(exact solution)却有疑惑。因為分段數愈多，雖愈準確，但也因此愈易增加整數變數(Integer variables)及決策變數(Decision variables)的數目，而使混合整數規劃(Mixed Integer Programming)模式龐大，增加電子計算機使用之困難及限制。而分段少，却又無法達到較精確之需求，造成了折衝(trade-off)之困難。

因此本文將研究採用效果較佳的可行方向法(method of feasible direction)配合容許誤差(flexible tolerance)的觀念，在擴大的限制區域內循一有效方向(usable direction)前進，每一階段一方面改進目標函數值，一方面縮小限制條件的容許誤差，最後將在誤差為零之情況下收斂於最佳解。由於此法較不受變數多寡之影響，因此效果將更理想。

本文另以現有之某淨水廠為案例，將其依各種條件要求及限制所建立之非線性規劃模式，藉本法所發展出之電子計算機程式加以求解，並與線性函數估計法所得估計值作一比較。再據其所得結果來評估此一淨水廠之系統功能。

二、應用可行方向法求解目標函數為非線性之問題

可行方向法(method of feasible directions)最早由 Zoutendijk 提出，其基本構想為由任一可行點依線性規劃方法找出一有效方向，沿此有效方向做線性尋求，在可行區域內找出此方向上之最佳點，再由此最佳點找出下一有效方向，做線性尋求，如此循序以往，最後希望能收斂於最佳解，以下將先介紹傳統之可行方向法，討論其收斂性，然後配合容許誤差之概念，設計一新的解題方法。

(一)基本理論

為容易說明起見，將非線性規劃分為兩種情形討論，一是線性限制式問題，一是非線性限制式問題。對此兩類問題均有相當之認識後，再討論一般性之問題。

1. 線性限制式問題

線性限制式之非線性規劃問題可以下列通式表示：

$$\min. f(x)$$

$$\text{s. t. } Ax \geq b \quad (\text{或 } a_i x \geq b_i, i = 1, 2, \dots, m) \quad (2.1)$$

* 國立臺灣海洋學院河海工程系(所)副教授，美國約翰霍浦金斯大學博士後研究員

其中A為矩陣， a_i ， b ， x 為向量，又若方向 d 為有效方向，必須滿足 $\nabla f^t(x^k)d < 0$ ，如此線性限制式問題可由以下定理找出一有效方向。

〔定理 2.1〕對於(2.2)式之非線性規劃問題， x^k 為一可行點，若 $\nabla f^t(x^k)d < 0$ ，且 $a_i^t d \geq 0$ 其中 a_i 為發生作用之限制式，則 d 為一有效方向。

d 為一方向，其長度並無意義， d 與 $d' = \lambda d$ ， $\lambda > 0$ 所指為同一方向，因此時常以單位長度來表示。根據〔定理 2.1〕，可將尋求有效方向之問題以下列之線性規劃問題表示：

$$\begin{aligned} \min. & \nabla f^t(x^k)d \\ \text{s.t.} & a_i^t d \geq 0, \quad i \text{ 對應於發生作用之限制式} \\ & 1 \geq d_i \geq -1, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (2.2)$$

若不加入 $1 \geq d_i \geq -1$ 之限制，則對於可行解 d 以 λd 取代時，仍為可行，而當 $\lambda \rightarrow \infty$ 時，目標函數將趨近於無限大而無意義，在求解上將有技術上的困擾。

2. 非線性限制式問題

限制式為非線性之問題可以下列之通式表示：

$$\begin{aligned} \min. & f(x) \\ \text{s.t.} & g_i(x) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, I \end{aligned} \quad (2.3)$$

函數 f 與 g_i ， $i = 1, 2, \dots, I$ 均為可微。此類問題可經由以下之定理求得一有效方向。

〔定理 2.2〕對於(2.3)式之非線性規劃問題， x^k 為一可行點，若 $\nabla f^t(x^k)d < 0$ ，且 $\nabla g_i^t(x^k)d > 0$ ， i 對應於在點 x^k 發生作用之限制式，則 d 為一有效方向。

〔定理 2.2〕中同時希望 $\nabla f^t(x^k)d < 0$ 以及 $-\nabla g_i^t(x^k)d < 0$ ，若將其中之一當做限制式看待，將會因不含邊界而無法以線性規劃求解，因此必須以其他列題方法取代。一種方法是求此兩者中較大者之最小可能數值，而令 z 為此最小數值，再配合方向單位化(normalize)的原則，可將尋求有效方向的問題列為以下之線性規劃模式：

$$\begin{aligned} \min. & z \\ \text{s.t.} & \nabla f^t(x^k)d < z \\ & -\nabla g_i^t(x^k)d < z, \quad i \text{ 對映於發生作用之限制式} \\ & 1 \geq d_j \geq -1, \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (2.4)$$

3. 一般非線性規劃問題

綜合前面線性限制式與非線性限制式兩種情形，將一般之非線性規劃問題表示為：

$$\begin{aligned} \min. & f(x) \\ \text{s.t.} & Ax \geq b \\ & g_i(x) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, I \end{aligned} \quad (2.5)$$

根據〔定理 2.1〕與〔定理 2.2〕可將尋找有效方向之問題做如下之例題方式：

$$\begin{aligned} \min. & z \\ \text{s.t.} & \nabla f^t(x^k)d < z \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} -\nabla g_i^t(x^k)d &< z \\ a_i^t d &\geq 0, \end{aligned} \right\} i \text{ 對應於發生作用之限制式} \quad (2.6)$$

$$1 \geq d_j \geq -1, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

[定理 2.3] 在點 x^k 根據 (2.6) 式求解有效方向 d ，若最佳解 $z^* = 0$ ，則點 x^k 滿足 Fritz-John 必要條件 [1]，

根據 [定理 2.3] 可歸納出可行方向法之邏輯法則如下：

① 選取一起始可行解 x^0 ，令 $k = 0$

② 求解 (2.6) 式，若最佳解 $z^* = 0$ 則停止，

否則沿方向 d^* 在可行區域內做線性尋求，得最佳點 $x^{k+1} = x^k + \lambda d^*$

③ 令 $k = k + 1$ ，執行 ②。

在可行區域內做線性尋求之方法很多，以黃金分割法較為有效 [2]，以下舉一簡單之例子說明以可行方向法求解非線性問題之情形。

[例 2.1] $\min, f(x) = x_1^2 - 8x_1 + x_2^2 - 8x_2$

$$\text{s.t. } g(x) = -x_1^2 + 4x_1 - x_2^2 + 4x_2 - 4 \geq 0$$

$$a_1^t x = x_1 + x_2 \geq 2$$

$$a_2^t x = -x_1 - x_2 \geq -5$$

求解：假設 $x^0 = [2 \ 0]$ ，發生作用之限制式為 $g(x)$ 與 $a_1^t x$ ，因此以 (2.6) 式尋求有效方向 d ：

$$\min, z$$

$$\text{s.t. } \nabla f^t(x^0)d = -4d_1 - 8d_2 < z$$

$$-\nabla g^t(x^0)d = -4d_2 < z$$

$$a_1^t d = d_1 + d_2 \geq 0$$

$$1 \geq d_1, d_2 \geq -1$$

由線性規劃求得 $d^* = [1 \ 1]$ ， $z^* = -4$ 。由於 $z^* < 0$ ，故 d^* 為一有效方向，由點 $x^0 = [2 \ 0]$ 沿方向 $d^* = [1 \ 1]$ 在可行區域內找出最佳點 $x^1 = [3.5 \ 1.5]$ ，再求下一有效方向。此時僅 $a_2^t x$ 發生作用，故可依 (2.2) 式列題：

$$\min, \nabla f^t(x^1)d = -d_1 - 5d_2$$

$$\text{s.t. } a_2^t d = -d_1 - d_2 \geq 0$$

$$1 \geq d_1, d_2 \geq 0$$

由線性規劃求得 $d^* = [-1 \ 1]$ ，而 $\nabla f^t(x^1)d^* = -4 < 0$ ，故 d^* 為一有效方向。由點 $x^1 = [3.5 \ 1.5]$ 沿方向 $d^* = [-1 \ 1]$ 在可行區域內找出最佳點 $x^2 = [2.5 \ 2.5]$ ，再求下一有效方向：

$$\min, \nabla f^t(x^2)d = -3d_1 - 3d_2$$

$$\text{s.t. } a_2^t d = -d_1 - d_2 \geq 0$$

$$1 \geq d_1, d_2 \geq -1$$

由線性規劃求得 $d^* = [-1 \ 1]$ ，而 $\nabla f^t(x^2)d^* = 0$ ，故點 x^2 為一 Fritz-John 穩定點而可停止計算。實際上由圖 2-1 亦可看出 $x^2 = [2.5 \ 2.5]$ 為此問題之最佳解。

對於非線性等號限制式問題，若依前面所提方法尋求有效方向，則所得方向為一與限制曲面相切之一方向（圖 2-2），沿此方向移動一段距離將無法滿足限制條件，而必須做一調整，以重新進入可行區域，每一階段大約有一半之計算量是用於維持可行性。

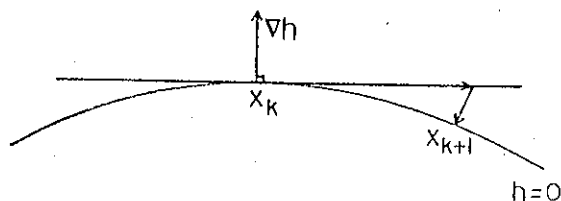
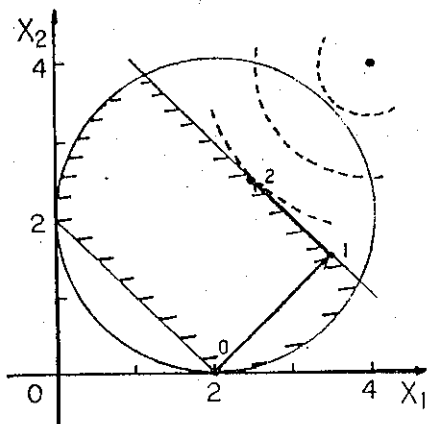


圖 2-1 以可行方向法求解 [例 2.1] 之圖解說明 圖 2-2 對非線性等號限制式之移動情形

4. Topkis-Veinott 修正方法

Zoutendijk 之可行方向在學理上無法證明其收斂性，主要由於其邏輯法則映射並不一定為封閉，許多學者並舉出反例說明此情形。為滿足收斂性之要求，又有學者提出一些改進之方法，以下介紹一種較有名，也是本研究所採用的 Topkis-Veinott 可行方向法 [3]。

Zoutendijk 方法只考慮發生作用之限制式，因此在連續二階段中，其所產生之有效方向差異很大，如 [例 2.1] 中， x^0 之方向為 [1 1]， x^1 之方向為 [-1 1]，感覺上多走了許多不必要的路徑（圖 2-1）。因此 Topkis 與 Veinott 提出另外一套求有效方向之方法，考慮所有限制條件，無論其目前是否發生作用。如果將非線性規劃問題列為 (2.3) 式之型式，則其產生有效方向 d 之方法為：

$$\begin{aligned} \min. \quad & z \\ \text{s.t.} \quad & \nabla f^i(x^k)d - z < 0 \\ & \nabla g_i^i(x^k)d + z \geq -g_i(x^k), \quad i = 1, 2, \dots, I \\ & 1 \geq d_j \geq -1 \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (2.7)$$

求得有效方向 d^* 後，其他步驟均與 Zoutendijk 方法一致。

[定理 2.4] 對 (2.3) 式之問題， x^k 為一可行點，令 $\{z^* d^*\}$ 為 (2.7) 式之最佳解，若 $z < 0$ ，則 d^* 為一有效方向；若 $z^* = 0$ 則 x^k 為一 Fritz-John 穩定點 [1]。

[定理 2.5] 對 (2.3) 式之問題，若依 Topkis-Veinott 方法產生一序列 $\{x^k\}$ ，則 $\{x^k\}$ 之任一凝聚點為 Fritz-John 穩定點 [1]。

由以上兩個定理可知 Topkis-Veinott 可行方向法就理論而言，可收斂於一 Fritz-John 穩定點，因此比 Zoutendijk 方法更為理想。底下將從另一角度探討 Topkis-Veinott 可行方向法，在數學推導上與線性估算法是相通的。

線性規劃一般認為比較簡單主要因為有一強有力的解題方法，即單體法，因此遇有問題複雜而又求解困難之非線性規劃問題時，總希望能將之轉換為線性規劃模式，使能配合使用有效之單體法。依此概念而最直接之應用方式，就是將所有函數均以線性估算表示，而成為線性規劃問題，同時由於函數估算僅在估算點附近具有代表性，遠離估算點即失去意義，因此在線性估算中再加上一移動距離之限制，不希望一次做太大之位移，在此對於(2.3)式之問題其線性估算即成為：

$$\begin{aligned} \min, & \nabla f^t(x^k)(x-x^k) + f(x^k) \\ \text{s. t. } & \nabla g_i^t(x^k)(x-x^k) + g_i(x^k) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, I \\ & 1 \geq x_i - x_i^k \geq -1, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (2.8)$$

若以d取代 $(x-x^k)$ ，則(2.8)式與(2.7)式之意義幾乎完全相同，只是在執行上線性估算法並不沿方向d做線性尋求，而僅以 $x^k + d$ 做為下一點 x^{k+1} ，若 x^{k+1} 為可行，則保留此點，若 x^{k+1} 為不可行，則令 $x^{k+1} = x^k + d/z$ ，直到 x^{k+1} 為可行為止。由此觀之，可行方法在基本上即為一種線性估算法。

(二)容許誤差概念

對於等號限制式在計算上，由於精確度的限制，很難完全滿足限制式，在實際求解時通常給予一容許誤差 ϵ ，只要一 $\epsilon < h(x) < \epsilon$ 就認為已滿足限制式之要求，在執行中，若 ϵ 太小，則為保持可行性所付出之計算量將很大而失去採用容許誤差之意義；若 ϵ 太大，則將來所求得最佳解之精確度相去太遠。綜合 ϵ 太大與太小的優缺點，可採變動容許誤差之概念，在最初之解題步驟中，距離最佳解較遠，可採用較大之 ϵ 值，以減少維持可行性所需之計算量，待至解題後期逐漸接近最佳解時，再縮小 ϵ 之值，以達精確度之要求，如此可兼顧計算量與精確度方面之要求。

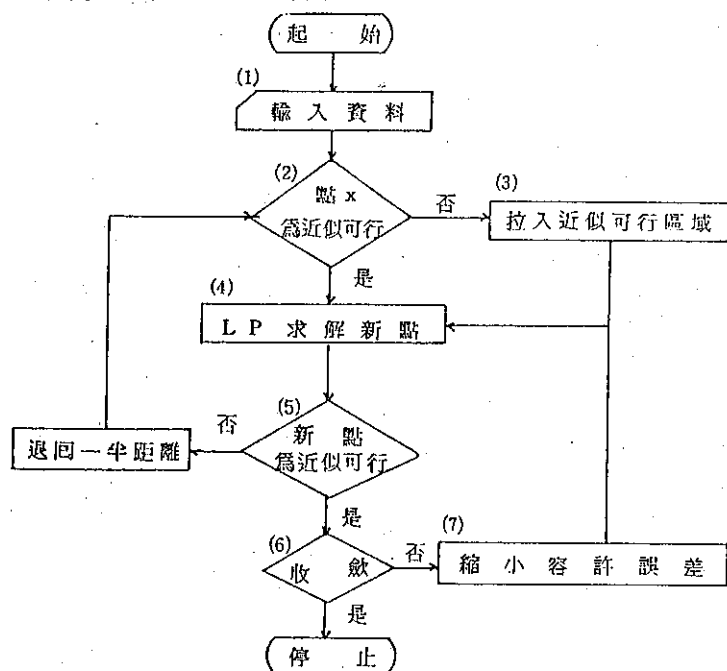


圖 2-3 配合容許誤差概念之可行方向法其解法流程圖

在產生可行方向方面，研究中採用一般評價較高的 Topkis-Veinott 方法，而以 (2.8) 式之線性估算法表示，只是將 $-1 < x_i - x_i^k < 1$ 之限制式改為 $-\epsilon < x_i - x_i^k < \epsilon$ ，不同階段 ϵ 之數值隨著改變，遇有無法滿足限制式要求之情形時，再以無限制式非線性規劃的方法將當時所處之點拉入可行區域。在基本上此融合容許誤差概念之可行方向法其執行邏輯法則如圖 2-3 所示，幾項重點說明如下：

1. 輸入資料

輸入資料之型式有二，一是以 READ 之方式輸入變數個數 N，等號限制式個數 NEQ，不等號限制個數 NGE，起始之容許移動距離 ϵ ，以及起始點 x^0 之座標；一是以副程式 SUBROUTINE 之方式輸入目標函數與限制條件，目標函數為 SUBROUTINE FUN，限制條件為 SUBROUTINE CON，其詳細情形如附錄中之電子計算機程式所示。

2. 測試可行性

目前所處之點其對限制條件之滿足情形可以下式表示：

$$T(x) = \sum_{i=1}^I u_i g_i^2(x) + \sum_{j=1}^J h_j^2(x) \quad (2.9)$$

其中 u_i 為 Heaviside 運算元，當 $g_i(x) \geq 0$ 時其值為零，反之則為壹。如此當 $T(x) = 0$ 時，點 x 為一可行解，反之則在可行區域外。若令 TTOL 為容許誤差，則 $0 < T(x) < TTOL$ 時，點 x 為一近似可行解，仍屬於一可行解。

TTOL 之始值令其為 $TTOL = \epsilon x(NEQ+1)$ ，隨著替代期之增加，TTOL 數值將逐漸減小。

3. 拉入近似可行區域

當 $T(x) > TTOL$ 時，點 x 為一非可行解，必須由點 x 移至一滿足限制條件之新點。一般在執行上可求取 (2.9) 式之最小值亦即 $\min T(x)$ ，此為一無限制條件之非線性規劃問題。研究中曾以 Nelder-Mead 之變動單體法、二次微分之牛頓法、Powell 之共軛方向法，以及 DFP 之近似牛頓法 (quasi Newton) 求解，結果以二次微分之牛頓法表現最為理想，不但速度快，而且所移入新點之位置也最為理想。至於牛頓法中較煩的求一次與二次微分部分，則是以中央差分 (centered difference) 數值的方法計算，亦即：

$$\nabla f_i = \partial f(x) / \partial x_i = \{ f(x_1, \dots, x_i + d, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i - d, \dots, x_n) \} / 2d \quad (2.10)$$

$$H_{ij} = \partial^2 f(x) / \partial x_i \partial x_j = \{ \nabla f_i(x_1, \dots, x_j + d, \dots, x_n) - \nabla f_i(x_1, \dots, x_j - d, \dots, x_n) \} / 2d \quad (2.11)$$

由非可行解拉入可行區域在執行上是以當時所處之非可行解為一起始值，求解 (2.9) 式之無限制式問題，以牛頓法逐次改進 $T(x)$ 函數值，待 $T(x) < TTOL$ 時表示已進入近似可行區，即可停止，此時所處之點即為一近似可行解。

4. LP 求解新點

前面曾討論過，Topkis-Veinott 可行方向法在基本上與線性估算法是相同的，將各函數以線性估算表示，一次微分部分以 (2.10) 式之中央差分法計算，再加上 $\epsilon \geq x_i - x_i^k \geq -\epsilon$ ， $i = 1$ ，

2, ..., n之移動範圍限制，即成為一線性規劃問題：

$$\begin{aligned} \min. & \nabla f^t(x^k)(x-x^k) + f(x^k) \\ \text{s. t.} & \nabla g_i^t(x^k)(x-x^k) + g_i(x^k) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, I \\ & \nabla h_j^t(x^k)(x-x^k) + h_j(x^k) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, J \\ & \epsilon \geq x_i - x_i^k \geq -\epsilon \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (2.12)$$

將變數做一轉換，令 $y_i = x_i - x_i^k + \epsilon$ 以簡化原問題使其成為一標準線性規劃問題，則(2.12)式成為：

$$\begin{aligned} \min. & \nabla f^t(x^k)y \\ \text{s. t.} & \nabla g_i^t(x^k)y \geq \epsilon \nabla g_i(x^k) - g_i(x^k), \quad i = 1, 2, \dots, I \\ & \nabla h_j^t(x^k)y = \epsilon \nabla h_j(x^k) - h_j(x^k), \quad j = 1, 2, \dots, J \\ & 2\epsilon \geq y_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (2.13)$$

可由任何線性規劃解法求解。本研究自行編寫二相單體法 (two-phase simplex method) 以求解(2.13)式之線性規劃問題，求得最佳解 y^* 可經由 $x^* = y^* + x^k - \epsilon$ 之轉換求得新點 $x^{k+1} = x^*$ 。若(2.13)式為無解，則縮小容許誤差為原來之 0.8 倍，重新測驗 x^k 點是否在可行區域內。

5. 新點之可行性

若經由求解(2.13)式再轉換而得之新點 x^{k+1} 並非一可行解，則向原來之 x^k 點縮短一半之距離，亦即令 $x^{k+1} = y^*/2 + x^k + \epsilon$ ，此時若仍非可行解，則必須以牛頓法拉入可行區域。

6. 收斂測定

在求解過程中欲判定是否已達收斂要求，必須由兩方面觀察，一項是可行性測定，一項是穩定性測定。可行性測定在判定目前所處之點是否為一可行解，亦即 $T(x)$ 是否等於零，研究中規定：

$$T(x^{k+1}) < 10^{-10} \quad (2.14)$$

才算合乎可行性之要求，至於穩定性之測定，則是觀察連續二點 x^k 與 x^{k+1} 其座標以及目標函數值之接近程度，必須滿足

$$\begin{cases} \left| \frac{f(x^{k+1}) - f(x^k)}{f(x^{k+1})} \right| < 10^{-4} \\ \text{若 } \left| f(x^{k+1}) \right| < 10^{-4} \text{ 則必須 } \left| f(x^{k+1}) - f(x^k) \right| < 10^{-4} \\ \left| \frac{x_i^{k+1} - x_i^k}{x_i^{k+1}} \right| < 10^{-4}, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ \text{若 } \left| x_i^{k+1} \right| < 10^{-4} \text{ 則必須 } \left| x_i^{k+1} - x_i^k \right| < 10^{-4} \end{cases} \quad (2.15)$$

同時滿足(2.14)與(2.15)二式才認為 x^{k+1} 為一最佳解。

7. 縮小容許誤差

經收斂測定後，若未能滿足收斂條件，則容許誤差必須做適當之調整，再繼續下一階段之計算。首先令 $TTOL = TTOL/2$ ，將容許誤差縮小一半；其次，若 $f(x^{k+1}) > f(x^k)$ ，亦即目標函數變差，則同時令 $\epsilon = \epsilon/2$ 縮短點 x 每階段所能移動之範圍。

配合容許誤差概念之可行方向法基本上即由以上七個單元所組成，使用者所須提供之資料為最基本者。（參1輸入資料），因此在使用上極為簡便。

三、案例淨水廠之實況及模式

(一)淨水廠的處理流程

本研究之淨水廠處理流程如圖3-1所示：

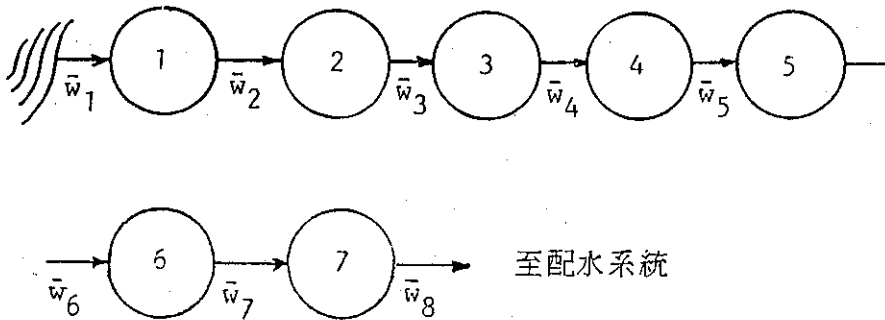


圖3-1 淨水廠處理流程圖

此處

\bar{w}_j ：為進入 j 處理單元，水質參數的向量 (Vector of water quality parameters into process "j")

- 1：原水加氯 (預加氯)，(pre-chlorination)
- 2：加明礬 (Alum feeders)
- 3：快混池 (Rapid mixing basin)
- 4：膠凝池 (Flocculation basin)
- 5：傾斜 (管) 沉澱池 (Tube settler sedimentation)
- 6：改良綠葉型快濾池 (Modified-greenleaf type filter)
- 7：清水加氯，(後加氯) (Post-chlorination)

又決策變數 (decision variable) 代表的意義及單元尺寸 (unit size) 為：

- x_1 ：原水加氯之加氯率 (公斤/小時)
- x_2 ：明礬加藥率 (公斤/小時)
- x_3 ：快混池之容積 (立方公尺)
- x_4 ：膠凝池之容積 (立方公尺)
- x_5 ：傾斜管沉澱池之表面積 (平方公尺)
- x_6 ：改良綠葉型快濾池之表面積 (平方公尺)
- x_7 ：清水加氯率 (公斤/小時)

(二)限制式

在建造及爾後操作維護總成本為最低的目標下，統合各處理設施的設計規範，處理效率，水質條件及

操作條件等來構成限制式。

進水水質事實上有其隨機之特性並非恒定值 (constant level)，因此依上敘原則所推導而得之限制式，將其機率項：

1. 混凝時總鹼度需求：

$$-\frac{19200}{Q}x_1 - \frac{9840}{Q}x_2 \geq 35 - F_{A_1}^{-1}(\alpha) \quad (3.1)$$

2. 防腐蝕關係式：

$$-\frac{32314}{Q}x_1 - \frac{10669}{Q}x_2 - \frac{32314}{Q}x_7 \geq 5.5 - 0.133F_{A_1}^{-1}(\alpha) + F_{C_1}^{-1}(1-\alpha) \quad (3.2)$$

同上述之道理，當為 $\max(C_1)$ 時，則其反函數為 $F_{C_1}^{-1}(1-\alpha)$

當為 $\min(A_1)$ 時，則其反函數為 $F_{A_1}^{-1}(\alpha)$

3. 混凝時之明礬加量

$$\frac{x_2}{0.00043Q} \geq \log \{F_{T_1}^{-1}(1-\alpha)\} + 0.281 \quad (3.3)$$

4. 出水濁度要求

$$k_T \frac{84}{Q}x_5 + \frac{28}{Q}x_4 + \frac{5.97}{Q}x_3 + 1.4x_6 \geq \log \{F_{T_1}^{-1}(1-\alpha)\} + 364 \quad (3.4)$$

5. 出水大腸菌數要求

$$0.055 \frac{84}{Q}x_3 + 0.25 \frac{84}{Q}x_4 + k_B \frac{3.5}{Q}x_5 - 0.5x_6 \geq \log \{F_{B_1}^{-1}(1-\alpha)\} - 433.25 \quad (3.5)$$

6. 快濾池水力貫穿之考慮

$$x_6 \geq 0.00563Q \quad (3.6) \text{ (modified greenleaf type)}$$

7. 加氯消毒

$$x_1 \geq \{F_{D_1}^{-1}(1-\alpha)\} \cdot Q \{ (10^3) / 24 \} \quad (3.7)$$

$$x_7 \geq \{F_{D_1}^{-1}(1-\alpha)\} \cdot Q \{ (10^{-3}) / 24 \} \quad (3.7.1)$$

8. 停留時間之考慮

$$\left. \begin{array}{l} x_3 \geq 104 \\ x_4 \geq 3125 \\ x_5 \geq 1800 \end{array} \right\} \quad (3.8)$$

9. 非負條件

$$X_j \geq 0 \quad \forall j; j = 1 \sim 7$$

以上式子中，以式(4.1)為例，實與式(4.9)(4.10)同義，

$$Pr \left\{ A_1 < 35 + \frac{19200}{Q} x_1 + \frac{9840}{Q} x_2 \right\} = \alpha \quad (3.9)$$

$$F_{A_1} \left(35 + \frac{19200}{Q} x_1 + \frac{9840}{Q} x_2 \right) \leq \alpha \quad (3.10)$$

但限制式中如包含了機率項，無法求解必需依據水廠水質資料，建立各水質參數的累積分佈函數(cumulative distribution function)圖，再依此CDF對或然率之轉換原則，轉化成確定式(certainty form)。則限制式又變成線性關係。

α (機率值)由設計者依經驗及過去操作紀錄，給予適當值。

(三) 目標函數：

由於目標函數並不包含機率項，不必經過任何轉化程序。

1. 依實際成本函數關係所得之目標函數：

$$\begin{aligned} \min Z = & 0.572x_1 - 0.00289x_1^2 + 0.0422x_2 - 0.0000449x_2^2 + 0.00386x_3 \\ & + 0.000136x_3^2 + 0.00775x_4 - 0.00000052x_4^2 + 0.001449x_5 \\ & - 0.000000063x_5^2 + 0.0148x_6 - 0.000025x_6^2 + 0.844x_7 \\ & - 0.00406x_7^2 \end{aligned} \quad (3.11)$$

2. 利用分段線性近似法原理求得之目標函數：

吾人利用圖(3-2)所示之原理，針對各處理設施成本函數統計分析並電腦繪圖之圖形，將其線性化。若目標函數為：

$$\min \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (z_{ij}r_{ij} + c_{ij}x_{ij}) + \sum_{j \in J} \sum_{i=1}^m e_j (o_{ij}h_{ij} + s_{ij}y_{ij}) \quad (3.12)$$

參見圖3-2，因分成三段，故 $m = 3$ ，式中：

r_{ij} ：建造成本模式中，變數 j 的第 i 段 segment 與座標軸相交得之截距，亦即是其固定成本。

z_{ij} ：建造成本模式中，變數 j 的第 i 段 segment 的整數變數，其值為 1 或 0。

c_{ij} ：建造成本模式中，對變數 x_{ij} 而言，第 i 段 segment 的斜率，也可以說是成本係數(價值係數)；cost coefficient。

y_{ij} ， x_{ij} ：第 j 個處理單元的 design parameter，(或稱第 j 個決策變數)的第 i 段 segment，各分別為 O.M.R. 及 construction 之表示

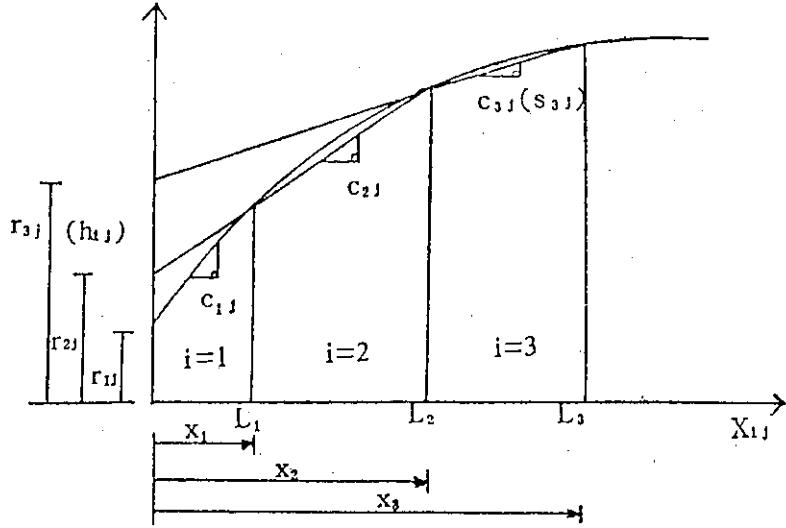


圖 3-2 目標函數示意圖

h_{1j} : OMR 成本模式中，變數 j 的第 i 段 segment 與座標軸相交所得之截距，亦即是其固定成本。

o_{1j} : OMR 成本模式中，變數 j 的第 i 段 segment 的整數變數，其值為 1 或 0。

s_{1j} : OMR 成本模式中，對變數 x_{1j} 而言，第 i 段 segment 的斜率，亦即是其成本係數（價值係數）

e_j : 即等額多次複合因子，PWF (uniform series present worth factor)

如此，則在限制式中，對某一決策變數而言，需增加下列之限制式：

$$z_{1j} + z_{2j} + z_{3j} \leq 1$$

$$z_{1j}, z_{2j}, z_{3j} \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \text{ 或}$$

$$x_1 < z_{1j} L_1$$

$$x_2 < z_{2j} L_2$$

$$x_3 < z_{3j} L_3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = X$$

又每一單元所選定之 L_1, L_2, L_3 不一定相同，所以 x_1, x_2, x_3 值亦異。

操作維護成本：

$$o_{1j} + o_{2j} + o_{3j} \leq 1$$

$$o_{1j}, o_{2j}, o_{3j} \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \text{ 或}$$

$$x_1' < o_{1j} L_1'$$

$$x_2' < o_{2j} L_2'$$

$$x_3' < o_{3j} L_3'$$

$$x_1' + x_2' + x_3' = X$$

限於篇幅關係，僅以建造成本函數圖中之傾斜管沉澱池為例，加以說明：

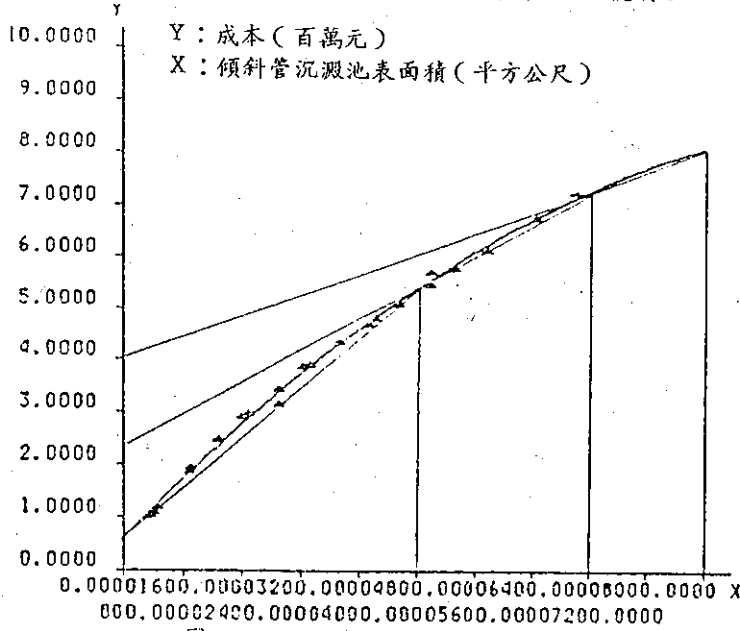


圖 3-3 傾斜管沉澱池建造成本模式

由圖 3-3 中知：

$$\begin{array}{lll} r_{15} = 0.66 & c_{15} = 0.0011 & L_{15} = 4000 \\ r_{25} = 2.45 & c_{25} = 0.0007 & L_{25} = 6400 \\ r_{35} = 4.10 & c_{35} = 0.00048 & L_{35} = 8000 \end{array}$$

則目標函數之分項式為：

$$(0.66z_{15} + 0.0011x_{15}) + (2.45z_{25} + 0.0007x_{25}) + (4.10z_{35} + 0.0005x_{35}) \quad (3.13)$$

其相對擴增之限制式為：

$$\begin{aligned} z_{15} + z_{25} + z_{35} &\leq 1 \\ z_{15}, z_{25}, z_{35} &= \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \\ x_{15} &< z_{15}(4000) \\ x_{25} &< z_{25}(6400) \\ x_{35} &< z_{35}(8000) \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} &< X_5 \end{aligned} \quad (3.14)$$

目標函數部份將各處理單元依式 (3.12) 方式相加即得。

吾人可見在目標函數中已介入混合整數。

限制式部分除原推導之式 (3.1) ~ 式 (3.8) 外，每一處理單元又擴增其個別限制式，如式 (3.14) 所示。整個模式變成非常繁雜的混合整數規劃模型。

四、電子計算機之求解及結果

(一) 求解混合整數規劃問題

根據圖(3-2)原理，分段多，則增加模式中變數及整數數目，增加電子計算機處理負荷，但較精確，分段究應多少段為宜，需與真解相比較，方能獲知。此處以分成三段為準，來建立混合整數規劃模式。

i. M. P. O. S 軟體系統簡介

西北大學電算中心開發成功的 M. P. O. S. 軟體系統，主要是求解線性規劃、整數規劃、二次規劃等數學模式之最佳化程式，其優點為：

- (1) 容易使用 (ease of use)
- (2) 經濟性 (economy)
- (3) 延展性 (expandability)
- (4) 交互式 (interactive optimization)

而其中之 LP-algorithm 計有：

- REGULAR 2-phase simplex (Standard Input)
- REVISED revised simplex

{	① Matrix form
	② Tableau form Alternative input
	③ Packed form
- PREVIOUS Packed revised simplex
- DUAL dual simplex
- MINIT primal-dual algorithm
- GENERAL generalized upper bounds

另其中之 IP-algorithms 計有

- BBMIP branch & bound mixed integer
- DSZIIP direct search 0-1 integer programming (Lemke & Spielberg's)
- GOMORY Gomory's cutting plane (all integer algorithm)

美國西北大學 Volelback Computing Center 發行有 user's guide 臺灣各大學所存軟體皆為 Jack Stein 及 Claude Cohen 所合編的 Version 4, 1978 版。

2. 使用需知：

- (1) 利用 MPOS 之 BBMIP 求解時，因其 source program 中定義記憶體為 "DATA MAXCM/200000 B/, MAXECS/700000 B/"

因此 CDC 機型如本身缺 ECS (Extended core storage) 裝置，則必需在不影響其他人使用操作前提下，由 CM (Central Memory) 中先行定義 (defined) 一部份為 ECS，方可求解。否則 CRT 上會出現：

"FL REQUEST BEYOND MFL (EXTENDED MEMORY)"

- (2) 使用 MPOS 之 BBMIP，其 CM 及 ECS 量 (Amounts) 為 [4]

① CM for continuous solution :

$$4 * (N+1) + (M+1) + (M+1) * (N+1)$$

(2)+ CM for branch-bound :

$$+8 * INTVAR$$

(3) ECS to stove intermediate tableaus :

$$INTVAR*((M+2)*(N+1)+M+1)$$

此處：

M = 限制式個數

N = 變數個數

INTVAR = 整數變數個數

3. 求解結果：

如表(4-1)及表(4-2)所示

表 4-1 混合整數規劃，利用 MPOS(BBMIP) 求解結果

整 數 解				變 數 解					
Z ₁₁	0	Z ₁₅	1	X ₁₁		X ₁₅	1800	Y ₁₅	1800
Z ₂₁	0	Z ₂₅	0	X ₂₁		X ₂₅		Y ₂₅	
Z ₃₁	1	Z ₃₅	0	X ₃₁	31.25	X ₃₅		Y ₃₅	
Z ₁₂	0	Z ₁₆	1	X ₁₂		X ₁₆	844.5	Y ₁	31.25
Z ₂₂	0	Z ₂₆	0	X ₂₂		X ₂₆		Y ₂	109.4
Z ₃₂	1	Z ₃₆	0	X ₃₂	109.4	X ₃₆		Y ₃	104
Z ₁₃	0	Z ₁₇	0	X ₁₃		X ₁₇	5.0	Y ₄	3125
Z ₂₃	0	Z ₂₇	1	X ₂₃		X ₂₇		Y ₅	1800
Z ₃₃	1	Z ₃₇	0	X ₃₃	104	X ₃₇		Y ₆	844.5
Z ₁₄	0	Z	0	X ₁₄		X ₁₄	100	Y ₇	5.0
Z ₂₄	0	Z		X ₂₄		X ₂₃	4	Y	
Z ₃₄	1	Z		X ₃₄	31.25	X ₃₃		Y	

表 4-2 利用 MPOS(BBMIP) 求解，工程經濟分析上採用現值法

設計 年限	水質機率 之考慮	目標函 數 值 (百萬元)	決 策 變 數 最 佳 解							備 註
			X ₁ (kgs/hr)	X ₂ (kgs/hr)	X ₃ (M ³)	X ₄ (M ³)	X ₅ (M ²)	X ₆ (M ²)	X ₇ (kgs/hr)	
25	定率性	58.4445	31.25	181.4	104	3125	1800	844.5	5	α=0.25
	序率性	56.5386	31.25	109.4	104	3125	1800	844.5	5	

(二)可行方向法配法容許誤差觀念之電子計算機求解：

1. 電子計算機程式：

採用 Kao & Chiou 氏發展之電子計算機程式(5)，針對本模式之特性加以測試並修改以符合使用上之需求。

2. 本法之流程圖：

如圖 2-3 所示。又有關資料輸入等各項求解步驟如文中前段所述。

3. 求解結果：

表 4-3 利用本法求解，工程經濟分析上採用現值法

目標函數式	設計年限	25	$\begin{aligned} \min z = & 0.572x_1 - 0.00289x_1^2 + 0.0422x_2 - 0.0000449x_2^2 + 0.00386x_3 + 0.000136x_3^2 \\ & + 0.00775x_4 - 0.00000052x_4^2 + 0.001449x_5 - 0.000000063x_5^2 + 0.0148x_6 \\ & - 0.000025x_6^2 + 0.844x_7 - 0.00406x_7^2 \end{aligned}$							備註
			決策變數最佳解							
設計年限	水質機率之考慮	目標函數值 (\$10^6\$)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
			(kgs/hr)	(kgs/hr)	(M ³)	(M ³)	(M ²)	(M ²)	(kgs/hr)	
25	定率性	57.69866	31.25	181.4	104	3125	1800	844.5	5	$\alpha = 0.25$
	序率性	55.60036	31.25	109.4	104	3925	1800	844.5	5	

表 4-4 原廠修正流程經電子計算機求解結果

設計參數 機率值 (α)	決策變數	X_1	X_2	X_3'	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
		前加氯率 (公斤/時)	加明礬率 (公斤/時)	加石灰率 (公斤/時)	快混池容積 (M ³)	膠凝池容積 (M ³)	沉澱池面積 (M ²)	快濾池面積 (M ²)	後加氯率 (公斤/時)
0.01		31.25	172.8	91.26	104	3125	1800	844.5	5
0.02		31.25	169.18	89.50	104	3125	1800	844.5	5
0.05		31.25	160.3	84.73	104	3125	1800	844.5	5
0.10		31.25	147.12	78.07	104	3125	1800	844.5	5
定率性		31.25	181.4	92.68	104	3125	1800	844.5	5

(三)求解結果及討論

1. 利用分段近似法求解，分段數為三段時，經由 MPOS-BBMIP 軟體程式所得之結果與本法所發展之程式所得之真解相較；在最佳解方面完全相同，僅目標函數值有極小之差異（1%）。可見本案例推導之目標函數分成三段即可。

2. 案例研討係以桃園地區某淨水廠為之，模式中代入該廠有關之各項水質及操作資料，依上數方法加以求

解，而有如下之結果：

- (1)該廠只在 $\alpha = 25\%$ ，即 $1 - \alpha = 0.75$ 時方有解，意表該廠利用傳統設計規範為基礎似有缺失，只獲得 75% 之信賴度。如表 4-3 所示。
- (2)經評估後，發現依原設計之流程來處理原水，則出水水質必具腐蝕性。因此吾人重新更改其處理流程，於原水加氯，加明礬後，即增加一個石灰之加注單元，以調合水中之鹼度。據此將修正流程後所推導之數學模式，仍應用本法求解。獲得信賴度 99% 之結果。如表 4-4 所示。

五、結論及建議

- (一)非線性規劃中，係利用線性化方法先將目標函數式轉化成線性，此過程就必須應用到混合整數規劃，而使模式趨於複雜。只要記憶空間足夠 MPOS-BBMIP 亦方便求解，需注意者係其運算過程中之中間表格 (intermediate tableaux) 乃暫存於 ECS (Extended core storage) 之中，使用之先，應先加以定義 (Defining)，以滿足所需記憶空間。
- (二)利用可行方向法配合容許誤差觀念來求解非線性規劃問題時其所得之解為真解 (exact solution)，快速而精確。
- (三)可行方向法基本精神在將限制條件線性化，因此對於限制條件非線性程度不高，或限制條件本身係屬線性之問題，效率極高，即使變數個數多，限制條件也多之情形，仍能在相當短之時間內收斂於最佳解。但對於非線性程度較高之問題，雖然變數個數與限制條件均不多仍無法收斂。所幸淨水廠之限制條件一般皆屬線性，或非線性程度不高者。
- (四)基於篇幅關係，本文中不對限制式之推導，加以詳細之說明，讀者可參閱“工程”月刊第六十卷第二期，本人之另篇“線性規劃模式中，限制式之推導——以淨水廠為例”。
- (五)案例研討 (case study) 係以桃園某淨水廠為例。模式中代入該廠記錄之各種水質資料，依上述方法加以求解。而有如下之結果：
不論是線性或非線性之解法，該廠只得到 75% 的信賴度，顯示應用傳統設計規範為基礎似有缺失。經評估後，發現依原設計流程處理原水，則出水水質將具腐蝕性，因此更改其流程，於原水加氯，加明礬後，增加石灰之加注，以調合水中之鹼度，據此修正後之模式，應用上法求解，結果獲得 99% 的信賴度。
非線性規劃之目標函數經線性化後 (每一函數曲線橫距部分僅分三段) 其所得決策變數值與乘數法所得完全相同。目標函數亦很接近，顯示使用線性化的近似性相當高，所以類如本例分段不需超過三段，以致增加變數個數，此結果對其它不同水廠亦可適用。

六、誌謝

本文承台灣省環境保護局局長，台大環工所兼任教授李公哲博士指正，特此申謝。

七、參考文獻

1. Bazaraa, M.S. and C.M. Snetty, "Nonlinear Programming", John Willy and Sons, 1969.
2. 吳文長，"非線性規劃問題—GRG 法之探討"，國立成功大學工業管理科學研究所碩士論文，民國七十三年。

3. Topkis, D.M. and A.F. Veinott, Jr. "On the convergence of some feasible direction algorithms for nonlinear programming", SIAMJ. Control 5(2): 268-279, 1967.
4. Claude Cohen and Jade Stein, (1978) "Multi Purpose Optimization System User's Guide, Version 4", Vogelback Computer Center, Northwestern University.
5. Chiang Kao and Shen-Tarng Chiou, "Some flexible tolerance methods for solving nonlinear programming problems", Research report of N.C.K.U..