中華民國自來水協會第三屆給水技術研討會論文集　　民國75年10月
Proc. 3rd Conf. on Water Supply Technology
in Republic of China, Oct. 1986

序率性線性規劃模式用於淨水廠最佳化設計之研究

Application of Stochastic L. P Model on The Optimal Design of The Water Treatment Facilities

李公哲*　吳明洋**　撰

一、前言

線性規劃（ Linear Programming ）應用於淨水廠之最佳化設計時，就進水水質是否考慮其隨機性（ Random ），而有定率性線性規劃模式（ Deterministic L.P. Model ）及序率性線性規劃模式（ Stochastic L. P. Model ）二種解法。

定率性模式是將進水水質視爲定常水準（ constant level ），依不同水質參數（water quality parameter）的特性及對出水水質之需求，而定下其值，以爲限制式推導之依據。

而序率性模式，係考慮進水水質之實際情況；即考慮其隨機特性，如此發展出來的數學模式中，其限制式將包含了機率項，吾人再透過蒐集而得之進水水質資料，所製成之累積機率函數圖（ cumulative probability Distribution Function ），將此包括機率項之限制式轉換成確定式（ certainty form ），以便於求解。

目標函數由於不包含機率項，因此不必考慮任何水質機率影響。由於經濟規模之關係，建造及操作維護成本函數應爲非線性關係，而使推導之目標函數變成非線性。整個模式乃成爲目標函數爲非線性，限制式爲線性的非線性規劃問題。

二、序率性線性規劃模式

㈠應用類型：

序率性線性規劃模式有二種常用的應用類型：

1. 二階段序率性線性規劃模式（ Two-stage Stochastic LP Model ）。
2. 機遇限制線性規劃模式（ Chance-Constrained LP Model ）。

㈡模式定義及型式：

1. 二階段序率性線性規劃模式：

⑴定義：二階段模式係分成二個階段，在知道水質以前，各處理單元對不純物之去除量（如以濁度爲例，則 T^1，T^2，T^1，T^7 ），定爲第一階段，其去除量當然與處理效率有關。

在輸入水質後，未達處理目標的不純物多出量 D_1」，定爲第二階段，此時對以

* 李公哲：國立台灣大學環境工程研究所所長
**吳明洋：國立台灣海洋學院河海工程系（所）副教授

determinstic equivalence ）方能符合線性規劃「確定性」之基本假設。

(3)確定性對等式之轉換：

原機率型式之限制式爲：

$$pr[AX \geq B] \geq P \tag{2.6}$$

以累積分配函數（cumlative distribution function）即 C.D.F. 之型式表示爲

$$F_B(AX) \geq P \tag{2.7}$$

則其確定性對等式爲：

$$AX \geq F_B^{-1}(P) \tag{2.8}$$

其中 $F_B^{-1}(P)$ 爲隨機變數向量B之C.D.F，$F_B(\cdot)$ 之反函數其性質和單位均與B一致，爲資區別，可令 $b = F_B^{-1}(P)$，其關係如下圖2-1所示。

(4)吾人決定採用此種模式，來表示進水水質之隨機性，肇因：

①加入機率，可再轉化成線性，對原限制式而言，不增加限制式，轉化也容易。

②機率由設計工程師決定，只要有足夠之體認與經驗，可以充份控制。

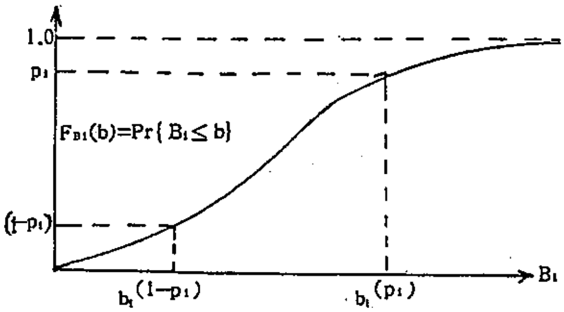


圖 2-1　隨機變數 B_i 之累積率分配函數

③機率給予範圍可以藉敏感度分析來調整。

三、模式之建立

㈠淨水廠之處理流程：

本研究之淨水廠處理流程如圖 3-1 所示：

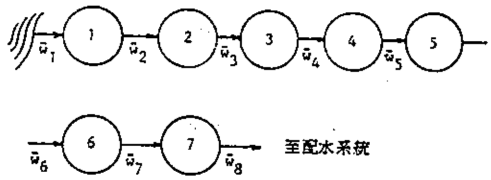


圖 3-1　淨水廠處理流程圖

此處

$\overline{w}_j$：爲進入 j 處理單元，水質參數的向量（vector of water quality parameters into process " j "）

1：原水加氯（預加氯），（pre-chlorination）

2：加明礬（Alum feeders）

3：快混池（Rapid mixing basin）

4：膠凝池（Flocculation basin）

5：傾斜（管）沉澱池（Tube settler sedimentation）

6：改良綠葉型快濾池（Modified-greenleaf type filter）

下各個處理單元，將增加處理負荷，而加大設計參數，增加單位處理費用。（c_i）

(2)型式：因此在目標函數中

$$\min \sum_{i=1}^{7} (\text{建造費用}) + E\left[\sum_{i=1}^{7} c_i D_{ij}\right] \qquad (2.1)$$

末項中之期望值即有機率之引入，吾人可以更明確地寫成：

$$\min \sum_{i=1}^{7} (\text{建造費用}) + \sum_{i=1}^{7} \sum_{j=1} P_j c_i D_{ij} \qquad (2.2)$$

其中P_j係發生實際水質之或然率，吾人若以每月平均水質值，則$j=1 \sim n$，$n=12$

而c_j：表示實際水質出現，對某單元未達設計處理效率時之增加以下單元處理尺寸之單價

增加限制式：

$$T_j \geq (T^1 + T^2 + \cdots + T^7) + (D_{1j} + D_{2j} + D_{3j} + \cdots + D_{7j}) \quad \forall_j \qquad (2.3)$$

T_j是表示一年中12個月之月平均入水濁度

$$T^i_{min} \geq T^i \geq D_{ij} \geq 0 \qquad (2.4)$$

(3)於淨水廠最佳化模式中，並不適宜採用二階段模式，原因為：

①P_j值不易決定。

② j 值究應定旬、年、月、日始較準確，難以研判。如認定以“日”為單位，較為準確，則一年中 j 值＝365。將使模式太大，增加電子計算機求解之困難。

③增加限制式個數。

2.機遇限制線性規劃模式：

(1)定義：將「機率」加諸限制條件，以控制該限制條件之可靠度（reliability）或風險度（risk），而使在此可靠度或風險度下，求得該模式之最佳解。

(2)模式型式：

$$\begin{aligned} \text{obj}: &\quad \min CX \\ \text{s.t.} &\quad pr[AX \geq B] \geq P \\ &\quad X \geq 0 \end{aligned} \qquad (2.5)$$

式中：

pr[·]：機率之表示型式

P：$m \times 1$之常數向量，即機率值，對任一分量P_i，$0 \leq P_i \leq 1$

B：某一具已知分配之隨機變數向量，分量為B_i

A：$m \times n$之常數矩陣，為限制條件中之技術係數

X：$n \times 1$之變數矩陣，即決策變數（decision variables）

C：$1 \times n$之常數向量，為目標函數之係數

此模式內含機率型式之限制式，吾人必須將其轉換為“確定性對等線性式”（

7 ：清水加氯，（後加氯）（ post-chlorination ）

又決策變數（ decision variable ）代表的意義及單元尺寸（ unit size ）爲：

x_1：原水加氯之加氯率（公斤／小時）

x_2：明礬加藥率（公斤／小時）

x_3：快混池之容積（立方公尺）

x_4：膠凝池之容積（立方公尺）

x_5：傾斜管沉澱池之表面積（平方公尺）

x_6：改良綠葉型快濾池之表面積（平方公尺）

x_7：清水加氯率（公斤／小時）

(二)目標函數：

1. 定義：吾人蒐集、整理並分析淨水設施各單元之施工及爾後操作維護費用，經統計分析後得到其成本模式。由於吾人係設定在設計年限內施工及操作維護總費用爲最低爲其目標。因此實爲各單元之總和。

又因爲符合經濟規模（ Economic Scale ）的關係，所以實際上成本方程式爲非線性，則吾人所導求的目標函數自屬非線性目標式。

2. 工程經濟分析探討：

淨水廠最佳化設計，是欲在施工及爾後操作維護總成本爲最低目標下，結合各處理設施之設計依據、處理效率、水質條件等條件所構成之限制式，來建立之一組數學模式以求最佳設計參數。即各決策變數保證獲得最佳解，爲便於說明目標函數設爲線性時爲：

$$\min \underbrace{\sum_{j=1}^{n} (r_j + c_j x_j)}_{\text{建造費用（初設費）}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{n} e_j (h_j + s_j x_j)}_{\text{操作維護費用}} \qquad (3.1)$$

式中

r_j：第 j 處理單元的建造成本對設計參數關係圖中，線性迴歸後之截距，亦即固定成本（ fixed cost ）

c_j：第 j 個處理單元直線迴歸的斜率，也可以說是價值係數（ cost coefficient ）

x_j：決策變數，亦即代表第 j 個處理單元的設計參數

h_j：第 j 個處理單元操作維護成本設計參數圖中，直線迴歸線的截距，亦即操作維護的固定成本

s_j：操作維護成本模式圖的斜率

e_j：PWF，即等額多次複合因子（ uniform series present worth factor ）

而 $PWF = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$

n ：設計年限，亦即使用壽命

i ：利率

依工程經濟分析原理、目標函數求得之解值，表示其費用之現值。

上敍目標標數各符號，可表示如下圖3－2之關係。

工程上常用的經濟分析方法有二種［1］［2］［3］，即現值法及年金法。此二法在國內企業，工程及國防上係最常被引用之分析方法。

事實上，目標函數爲非線性，直接對操作維護費用項，乘上（PWF）因子，再加上建造費用項即可。

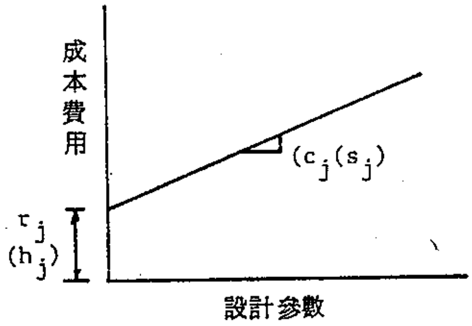


圖 3-2　成本函數圖

3. 目標函數：

當設計年限（n），爲25年，本案例水廠所得之目標函數爲（採用現值法）：

$$
\begin{aligned}
\min Z = {} & 0.572x_1 - 0.00289x_1^2 + 0.0422x_2 - 0.0000449x_2^2 + 0.00386x_3 + 0.000136x_3^2 \\
& + 0.00775x_4 - 0.00000052x_4^2 + 0.001449x_5 - 0.000000063x_5^2 + 0.0148x_6 \\
& - 0.000025x_6^2 + 0.844x_7 - 0.00406x_7^2 \qquad (3.2)
\end{aligned}
$$

(三)限制式：

限制式之推導，需就原水水質、出水標準、處理效率、停留時間、操作條件、防止腐蝕、混凝形成、總鹼度限制等要求下，依實驗所得資料，推導而成［4］，爲便於瞭解，吾人將分別列出定率及序率條件之限制式。

1. 定率條件下之限制式：

(1)腐蝕之考慮：

$$\frac{-32314}{Q}x_1 - \frac{10669}{Q}x_2 - \frac{32314}{Q}x_7 \geqslant 5.5 - 0.133\min(A_1) + \max(c_1) \qquad (3.3)$$

式中A_1: 原水中之總鹼度（Total Alkalinity）；mg／ℓ

c_1: 原水中之自由二氧化碳含量（Free carbon Dioxide）；mg／ℓ

Q：處理流量（CMD）

(2)混凝時之明礬加量：

$$\frac{x_2}{0.00043Q} \geqslant \log\{\max(T_1)\} + 0.281 \qquad (3.4)$$

式中T_1：原水中之濁度（Turbidity）

(3)出水濁度之考慮：

$$\log 4 \geqslant 12.4 - 0.047x_6 + 0.034\log T_1 - \frac{0.203}{Q}x_3 - \frac{0.952}{Q}x_4 - K_T\frac{2.86}{Q}x_5 \qquad (3.5)$$

式中：K_T：沉澱池的濁度去除率（1／hr）

(4)出水大腸菌之考慮：

$$0.055\frac{84}{Q}x_3+0.25\ \frac{84}{Q}x_4+K_B\ \frac{3.5}{Q}x_5-0.5\,x_6\geqslant\log\{\max(B_1)\}-433.25 \tag{3.6}$$

式中：B_1：原水中之大腸菌數（MPN#／100 mℓ）

K_B：沉澱池中大腸菌去除效率（1／day）

(5)混凝時總鹼度需求：

$$\min(A_1)-\frac{19200}{Q}x_1-\frac{9840}{Q}\ x_2\geqslant 35 \tag{3.7}$$

(6)停留時間考慮：

$$\left.\begin{aligned} x_3 &\geqslant 0.0007\ Q\\ x_4 &\geqslant 0.021\ \ Q\\ x_5 &\geqslant 0.012\ \ Q \end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

(7)水力貫穿之考慮：

$$x_6\geqslant 0.00563\ Q \tag{3.9}$$

(8)加氯：

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= Q\cdot D_1\cdot(10^3)/24\\ x_7 &= Q\cdot D_7\cdot(10^3)/24 \end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

式中 D_1，D_7 ：加氯率（mg／ℓ）

2.序率條件下之限制式：

(1)防腐蝕關係式：

$$-\frac{32314}{Q}x_1-\frac{10669}{Q}x_2-\frac{32314}{Q}\ x_7\geq 5.5-0.133\,F_{A1}^{-1}(\alpha)+F_{c1}^{-1}(1-\alpha) \tag{3.11}$$

(2)混凝時之明礬加量

$$\frac{x_2}{0.00043\ Q}\geq\log\{F_{T1}^{-1}(1-\alpha)\}+0.281 \tag{3.12}$$

(3)出水濁度要求

$$K_T\frac{84}{Q}x_5+\frac{28}{Q}x_4+\frac{5.97}{Q}x_3+1.4\ x_6\geq\log\{F_{T1}^{-1}(1-\alpha)\}+364 \tag{3.13}$$

(4)出水大腸菌數要求

$$0.055\frac{84}{Q}x_3+0.25\frac{84}{Q}\ x_4+K_B\ \frac{3.5}{Q}-0.5\,x_6\geq\log\{F_{B1}^{-1}(1-\alpha)\}-433.25 \tag{3.14}$$

(5)混凝時總鹼度需求：

$$-\frac{19200}{Q}\ x_1-\frac{9840}{Q}x_2\geq 35-F_{A1}^{-1}(\alpha) \tag{3.15}$$

(6)停留時間考慮：同 1 —(6)

(7)水力貫穿考慮：同 1 —(7)

(8)加氯消毒：

$$x_1 \geq \{ F_{D1}^{-1} (1-\alpha) \} \cdot Q [(10^3) / 24] \tag{3.16}$$

$$x_7 \geq \{ F_{D1}^{-1} (1-\alpha) \} \cdot Q [(10^3) / 24] \tag{3.17}$$

四、模式之改換

(一)水質的累積機率分佈函數：

吾人根據前述機遇限制線性規劃模式之理論，限制式中已包括了機率反函數項，必需求出其值，始能使其成爲確定等式•

對或然率及 $b_1(\alpha)$ 之關係如圖 4-1 所示：

1. 當 $pr[g_1(x) \leq B_1] \geq \alpha$ 時，吾人以(b)圖判斷知 $pr[\cdot] \geq 0.15$，則座落位置在斜線段，從而得到對應 $b_1^{\alpha} = 100$ 因此 $g_1(x) \geq 100$，但 $pr[\cdot]$式中，爲 $g_1(x) \leq B_1$，必爲矛盾。

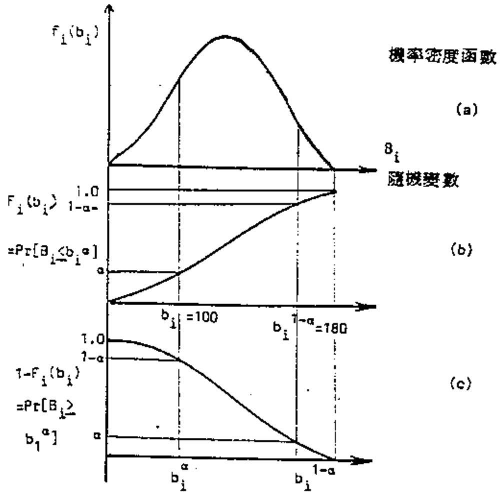


圖 4-1　CDF對或然率及 $b_1^{(\alpha)}$ 之關係圖

2. 故必需引用(c)圖來判斷，則爲 $pr[\cdot] \geq 0.15$，則座落位置如圖上斜線段所示，並得 $b_1^{(1-\alpha)} = 180$，因此 $g_1(x) \leq 180$ 合於原題 $g_1(x) \leq B_1$，則在式 (3.15) 中，吾人可寫成：

$$pr \{ A_3 \leq 35 + \frac{19200}{Q} x_1 + \frac{98400}{Q} x_2 \} \leq \alpha \tag{4.1}$$

應用上法，即可求得具機率之 A_1值，設爲 k，則

$k = b_1^{(1-\alpha)}$，k 爲常數，大於 0

此處因爲是利用(c)圖，圖 complementary probability，

$$k = \begin{cases} b_1^{(\alpha)} & \text{用(b)圖} \\ b_1^{(1-\alpha)} & \text{用(c)圖} \end{cases} \text{則，}$$

$\therefore \alpha$ 之 Complementary probability 爲“ $1-\alpha$ ”表示

$$A_3 = A_1 - \frac{19200}{Q} x_1 - \frac{9840}{Q} x_1 \geq 35 \tag{4.2}$$

$\because A_1 = k$

$\therefore k \geq 35 + \frac{19200}{Q} x_1 + \frac{9840}{Q} x_2$，亦即

$$-\frac{19200}{Q}x_1-\frac{9840}{Q}x_1 \geq 35-k \qquad (4.3)$$

而 $k = F_A^{-1}(\alpha)$，此爲理論推演。

(二)隨機線性規劃改換成確定等式

1. 目標函數

目標函數因不含機率項，因此不必改換。

2. 限制式

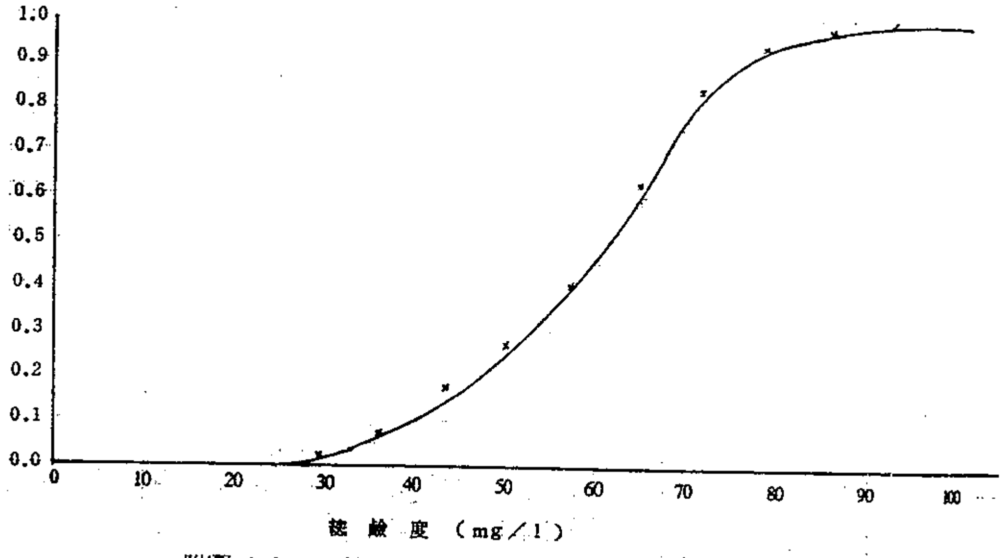
(1)混凝時總鹼度之考慮

$$-\frac{19200}{Q}x_1-\frac{9840}{Q}x_2 \geq 35-F_{A1}^{-1}(\alpha) \qquad (4.4)$$

倒回推，即 $F_{A1}\left(35+\frac{19200}{Q}x_1+\frac{9840}{Q}x_2\right) \leq \alpha$，

即 $$pr\left\{A_1 \leq 35+\frac{19200}{Q}x_1+\frac{9840}{Q}x_2\right\} \leq \alpha$$

圖 4-1 中之(b) type 圖再查附圖 4-2 惟此處之 α 要由設計工師師決定，在此吾人



附圖 4-2　總鹼度之累積機率分佈（F）

定 $\alpha = 0.25$；即 $1-\alpha = 75\%$ 時，得

$$0.128x_1+0.066x_2 \leq 13.5 \qquad (4.5)$$

此處之所有水質資料及流量資料皆以某案例水廠爲研究範圍（case study），同理，吾人可以分別得到當 $\alpha = 0.25$ 時，其它限制式之等式轉換式。

(2)防腐蝕：

①當 $\alpha = 0.6$，則

$$-0.215x_1-0.071x_2-0.015x_7 \geq 2.8+5.5-0.133 \times 62$$

$$\Rightarrow 0.215x_1+0.071x_2+0.215x_7 \leq -0.54 \leq 0 \qquad (4.6)$$

②當 $\alpha = 1.0$

$$-0.215x_1-0.071x_2-0.215x_7 \geq 1.8+5.5 \times 0.133 \times 86$$

$$\Rightarrow 0.215x_1+0.071x_2+0.215x_7 \leq 4.14 \text{（非矛盾式但不合理）} \qquad (4.7)$$

由上式可知100％的機率顯示，無法防蝕，一旦加入限制式中而藉電子計算機求解時，反會束縛（binding）整個模式而無法求解（即得不到可行解），因此將把此限制式刪除，其影響結果，於敏感度分析中再予討論。

(3)混凝時之明礬加量：

$\alpha = 0.25$ 時，得 $x_2 \geqslant 109.4$ (4.8)

(4)出水濁度：

$\alpha = 0.25$ 時，得

$$0.213x_3+x_4+0.126x_5+7500x_6 \geqslant 1847491 \qquad (4.9)$$

(5)出水大腸菌：

$\alpha = 0.25$ 時，得

$$-x_3-4.55x_4-0.057x_5+16200x_6 \leq 13982985 \qquad (4.10)$$

五、電子計算機之求解

(一)應用乘數法求解目標函數為非線性

Hestenes發展乘數法（Multipliers）以求解；目標函數為非線性，限制式亦為非線性之非線性規劃問題（Nonlinear programming）。

一般之非線性規劃問題解法通常在限制區域內，以一些替代關係式逐步向最佳解逼近，若一時離開限制區域，則必須立刻拉回限制區域，對於有等號限制條件之問題，常需不斷的由限制區域外拉入限制區域內，耗費相當可觀之計算量。本容許誤差之觀念，對限制條件給予相當之誤差，而不必完全滿足，在計算之過程中逐漸縮小此容許誤差，待收斂至最佳解時，容許誤差也剛巧為零而使得限制條件得以完全滿足，如此可省去許多由限制區域外拉入限制區域內所耗費之計算量，直覺上很有效率。

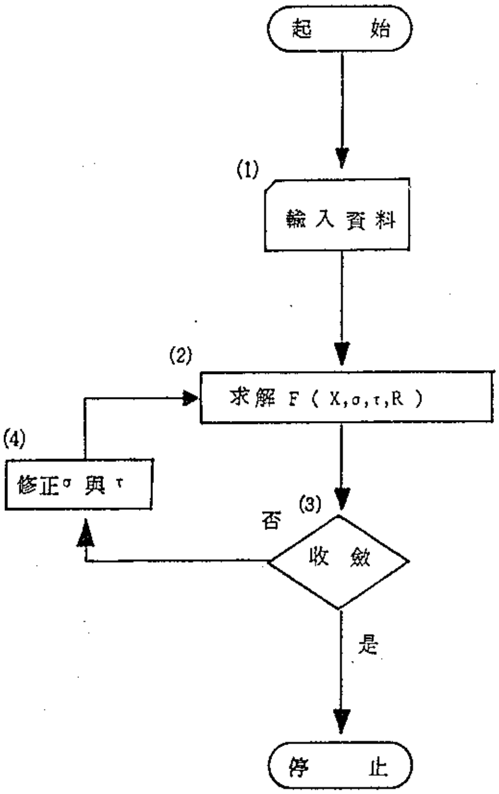


圖5－1 乘數法解法之流程圖

(二)乘數法求解之流程：

如圖 5-1 所示：

(三)乘數法電子計算機程式及其執行

1. 電子計算機程式

採用高氏之研究［ 5 ］中所發展出來之程式，係針對本模式加以測試並修改以符合需求而來。

2. 資料輸入（ INPUT DATA ）：

輸入資料之型式有二：

(1)是以READ之方式輸入N1（變數個數），NEQ（等號限制式個數），NGE（不等號限制式個數），R（懲罰常數），x^0（起始點座標）。

(2)是以副程式SUBROUTINE之方式輸入目標函數與限制條件，目標函數為 SUBROUTINE FUN，限制條件為SUBROUTINE CON。

(3)R 值是直覺地利用 1, 10, 10^2, 10^{-1}, 10^{-2}……etc.在求解過程中將保持為一常數。

σ_0與τ_0一開始令其為 0，使（ X, σ_0, τ_0, R ）成為一標準之懲罰函數。

3. 求解

函數F並無限制式，研究中採用powell 之共軛方向法求解［ 6 ］。當N值小時，powell法極為有效，但當N值大時，powell法變得較無效率，將來可考慮改用一般評價較高之DFP、BFGS等近似牛頓法。

4. 結果：

如表 5-1 所示：

表 5-1　利用乘數法求解，工程經濟分析上採用現值法

目標函數式	設計年限	25	$\min z = 0.572x_1-0.00289x_1^2+0.0422x_2-0.0000449x_2^2+0.00386x_3+0.000136x_3^2+0.00775x_4-0.00000052x_4^2+0.001449x_5-0.000000063x_5^2+0.0148x_6-0.000025x_6^2+0.844x_7-0.00406x_7^2$							
設計年限	水質機率之考慮	目標函數值 ($\$10^6$)	決策變數最佳解							備註
			x_1 (kgs/hr)	x_2 (kgs/hr)	x_3 (M^3)	x_4 (M^3)	x_5 (M^2)	x_6 (M^2)	x_7 (kgs/hr)	
25	定率性	57.69866	31.25	181.4	104	3125	1800	844.5	5	
	序率性	55.60036	31.25	109.4	104	3925	1800	844.5	5	α=0.25

六、結論

1. 本文乃利用作業研究（Operations Research）的理論及方法，在建造及爾後操作維護總成本為最低的目標下，統合各處理設施的設計規範，處理效率，水質條件及操作條件等所構成之限制式，來建立的一組數學模式，以求取各處理設施之最佳設計。
2. 作業研究領域中，用來求解最佳模式，最常用的方法為動態規劃及線性規劃，前者並無統一之標準模式，因個別問題而異，電子計算機程式也因此必須個別開發，增加實用上之不便，更且任何動態規劃問題一旦其狀態變數超過三個以上，且目標函數為非線性時，一般電子計算機將較難求解。而淨水廠中之狀態變數包括濁度大腸菌、混凝、腐蝕、總鹼度、加藥率等，遠超過了3個，因此自不宜引用動態規劃來導衍數學模式。
3. 引用線性規劃來發展模式時又因考慮水質機率性與否，而分為定率性線性規劃模式（即把水質之變動視為一定之定常水準）及序率性線性規劃模式（即考慮水質參數之隨機性），而後者又分為機遇限制線性規劃及二階段序率性模式。二階段法因會增加限制式數目，且發生實際水質之或然率有難以決定等缺失，因此不予引用。
4. 機遇限制性模式考慮了進水水質的「序率特性」，並將機率加諸限制條件，以控制限制條件的可靠度或風險度，此點確非定率性模式所能做到。實際上，定率性模式係機遇限制性模式之特例，因其所使用之某些特殊確定值實係機遇限制性模式所用「機率分配」中，相對於某些「機率」之特定值，唯此「機率可靠度」不一定是吾人所需者。
5. 依據經濟學上之理論，產量與成本，成二種關係；一為線性關係，一為曲線遞減關係，合乎後者之成本關係，吾人稱之有規模經濟，自來水單元設備，概為曲線關係。
6. 非線性規劃最佳解法是利用乘數法（multiplier）之原理，將限制條件與目標函數經由某些特殊之函數組合，成為一無限制條件之非線性規劃問題，再給予容許誤差。據此發展出來的程式，可以對非線性模式直接求解，快速而精確。所得之解為眞解（exact solution）。
7. 以本文中，某案例水廠為例，當$\alpha \geq 0.25$時，始能求出數學模式之解值，意表按該廠之原有設計，針對原水水質、操作性只有75％的信賴度（或表現度），顯示依傳統設計規範而得之原設計流程似有缺失，必需加以檢討。
8. 不同條件要求下之限制式推求十分複雜，礙於篇幅關係無法詳述，本文僅著重於探討序率性規劃模式之建立及探討。
9. 敏感度分析是必要的步驟，可以依不同之水廠特性及吾人所欲獲知之目的，而做不同情況之分析。
10. 綜合本文研究結果，本模式有下述優點：
    (1)透過費用之比較及驗證，而確定獲知其實用性及可靠度。
    (2)限制式之推導結果，是否為合理式，可以預先發現可能疏失，而於設計時予以改善，避免錯誤。
    (3)證實水質機率性考慮之必要，及其因而獲得操作上之高信賴度。
    (4)經由敏感度分析，可以得到實質上之意義及各廠水質因子流程設計，操作條件等特性。

七、參考資料

1. 陳寬仁，工程經濟原理，私立東海大學工業工程及管理中心，民國 59 年 8 月。
2. 杜善良，經建計劃的評估與考核，六國出版社，民國 74 年 10 月。
3. William R. Park, " Cost Engineering Analysis " McGRaw-Hill, New York, 1982.
4. 吳明洋，"淨水廠最佳化設計及其評估"，國立台灣大學土木工程研究所博士論文，民國 75 年 6 月。
5. 高強，"變動容設誤差新法求解非線性規劃問題之研究"成大工業管理科學系研究報告，民國 74 年 9 月。
6. 高強，"求解無限制條件最佳化問題之一新法～輻射法"，成大工業管理科學系研究報告，民國 73 年 3 月。