# 線性規劃中混合整數規劃應用於淨水廠最佳化設計之研究

## (Application of Mixed Integer Programming on The Optimal Design of The Water Treatment Facilities)

李 公 哲 *　吳 明 洋 **撰

## 一、前　言

隨著科技與工業之急速發展，環境品質問題日趨重要，淨水處理設施( treatment facilities )不斷推陳致新，大加改進，以保證獲得充沛之供水量及良好之水質。而使淨水設施近年來逐漸超過給水工程總費用的 30 %以上。 因此站在自來水工程規劃及設計立場，如何在兼顧出水量及水質條件上來降低工程費用，實爲當務之急。

本文乃利用作業研究( Operations Research )的理論及方法，在施工及爾後操作維修總成本爲最低之目標下，統合各處理設施之設計依據( Design criteria)處理效率、水質條件等所構成之限制式( constraints )來建立之一組數學模式，以求取各處理設施之最佳設計流程及尺寸。

作業研究領域中，有多種方法可以獲得目標函數下之最佳解，諸如線性規劃( Linear programming )、動態規劃( Dynamic programming )，二次規劃( Quadratic programming )、分數規劃( Fractional programming )、幾何規劃( Geometric programming )等，其中線性規劃最爲簡便。既有軟體程式較多，但其目標函數式( Objecive function )必爲線性，始能使用。其他方法或因軟體程式難求，或因不適用淨水廠設計模式，較少採用。

由於施工及操作維修成本函數並非全屬線性關係，因此在建立目標函數式時，必須使用分離規劃( Separable programming )之原理，利用 Piecewise method 先行將目標函數式轉換成線性。此過程就必需應用到混合整數規劃( Mixed Integer Method )，將使整個模式合於線性規劃之需求，以便於求解。

顧及篇幅關係，本文將著重於導衍一套方法論( Methodology )，以爲自來水規劃，設計人員實用上之參考。

## 二、線性規劃模式

### 2-1定　義

---

* 李公哲：台灣大學環境工程研究所主任
** 吳明洋.：台灣大學土木工程研究所博士班研究生

線性規劃(Linear Programming)簡稱LP,屬作業研究( Operations Research )之範疇，自George B. Dantzing於1947年建立線性規劃問題之理論及其求解法後，在短短的三十餘年間，不論在理論與應用上，均發展神速。在軍事、農業、交通運輸，尤其工商企業為最。

工程上應用線性規劃乃晚近十餘年間之事，其為最佳化模式( Optimization model)之一種，乃是在線性不等式(可含等式)限制條件下，求取目標函數極值(最大值或最小值)的方法。通常限制條件可以表示吾人有限之資源，目標函數則表示吾人預定之目標，其所求得之解值，可確保為「最佳解」( Optimal solution )，以別於模擬模式( Simulation model )的「滿意解」( Satisfying solution )。

## 2-2 分 類

線性規劃一般可以分為以下幾種應用類型：

1. 定率性(確定性)線性規劃模式( Deterministic LP Model )。
2. 序率性(隨機性)線性規劃模式( Stochastic LP model )：
   (1)二階段序率性線性規劃模式( Two-Stage Stochastic LP Model )。
   (2)機遇限制線性規劃模式( Chance-Constrained LP Model )

## 2-3 線性規劃之性質及其形式：

### 2-3-1 型 式：

定率性線性規劃模式，其型式如下：

$$\left.\begin{aligned}
&\text{目標函數：Max ( or Min ) } Z = c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+\cdots+c_nx_n \\
&\text{限制式：} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_n \le b_1 \\
&\qquad a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots+a_{2n}x_n \le b_2 \\
&\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
&\qquad a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots\cdots+a_{mn}x_n \le b_n
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(2\text{-}1)$$

非負條件：$x_1, x_2, \cdots, x_n \ge 0$

亦可寫成矩陣( Matrix )型式，即

$$\left.\begin{aligned}
&\text{目標函數：Max (或Min ) } Z = \bar{C}\bar{X} \\
&\text{限制式：} \quad \bar{A}\bar{X} = \bar{b} \\
&\text{非負條件：} \quad \bar{X} \geqq o
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2\text{-}2)$$

上式中：$\bar{c} = [c_1, c_2 \cdots\cdots c_n]_{1\times n}$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1} \qquad \bar{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

**2-3-2** 性　質：

線性規劃有下列之性質：

1. 目標之確定：目標函數必須爲線性，其中 c 稱之爲價值係數（ price coefficient）$c_i$ 值可正可負，$x_i$ 稱爲決策變數（ decesion variable ）。

2. 有一組線性之限制條件：

如（ 2-1 ）式中 $a_{11},a_{12}\cdots\cdots a_{mn}$ 稱爲常係數（ constant coefficient ），又 $b_1,b_2\cdots b_m$ 稱爲常數（ constant ），二者均可爲正、爲負，而m個線性之限制條件，統稱之爲「結構限制條件」（ structual constraints ）。

3. 變數爲正：

所有決策變數均須爲正或零，稱爲非負數限制條件（ Non-negtive Constraints）

**2-4** 實際應用：

通常吾人解ＬＰ問題時，即係設法在無窮多組之答案下，取出一組值，適爲吾人所欲尋覓目標函數之極大或極小值。亦即在許多可行之方案中，在人力、財力、物力種種限制條件下，獲得吾人最優之決策，以達成目標。在實際問題中，列出ＬＰ問題前，吾人必須確定所有價值係數（ $c_i$）常係數（ $a_{mn}$ ）及常數（ $b_m$ ）之值， 有時此種數值極易獲得，惟有時蒐集此項數值，十分費力。

於淨水廠最佳化設計時，目標函數如屬線性，吾人係欲求得其施工加上爾後操作維修成本爲最小狀況時，在一組限制式（即統合了設計準則、處理效率、水質條件、操作條件等所構成之限制式）下，求得處理單元之最佳「尺寸」，亦即最經濟「尺寸」。此處所言之「尺寸」，係指各處理設施的設計參數（ Design parameter）。於快混池爲其容積，於沉澱池爲其表面積，於加藥設備爲其加藥率（ kgs／HR ）等。

此外，處理流程及設備型態（諸如傳統式沉澱池，或快沉設備沉澱池）必須先行決定。吾人可就不同流程之間所得之解值，加以比較及選擇，從而爲設計之參考。

動態規劃（ Dynamic programming ）亦是常用的一種最佳化模式，可以同時就各種不同流程，不同單元，於追求總成本最低之目標函數下，求得一組最佳組合而成的流程及解值且適用於目標函數爲線性或非線性。但其最大缺點如下：

1. 並無統一之標準模式，因個別問題而異。
2. 電腦程式要依個別問題去開發，無既有軟體可以利用。
3. 任何ＤＰ問題一旦其狀態變數（ state variable）超過 3 個或 3 個以上，一般現有電子計算機將無法解題。

在廢（污）水處理廠之最佳化設計上，因爲其考慮之資源（ resource ）分派，僅爲 B.O.D 及 S.S，因此非常適用，但於淨水廠之設計，吾人尚需考慮濁度、細菌、腐蝕、混凝、總鹼度、加藥率等對一連串處理單元間之影響，其狀態變數已超過 3 個一般電算機難以求解，並不適用 DP模式。

## 三、目標函數爲非線性之解法

當目標函數爲非線性時，而限制式仍爲一組不等式（可包含等式）時，必須採用一般非線

性解法。

1. Kuhn — Tucker conditions Method.

2. Lagrange multipliers Method.（限制式爲等式）

3. Box's sequential search algorithm.

這些方法於工程上較少引用，主要是理論上較繁難，更無旣有程式可以利用。至於無限制條件，目標函數非線性之解法，研究論著甚多，且已發展出各種方法及程式。惟實際問題上極少模式是無限制式的。

因此本文中，主要係引介非線性函數線性化（piece—wise）之各種方法：

1.（Method I）: Segment Variable :

只可求max concave 或min convex fn.

例如：$\max Z = 2x_1 + x_2^{1/2} - 3x_3$

$$\text{s.t}: \quad x_1 + 10x_2 \le 20$$

$$3x_1 - 2x_2 + x_3 \le 6$$

$$x_1 \ge 0$$

上模式中，目標函數卽屬非線性，吾人可把其中 $x^{1/2}$ 項，加以處理：

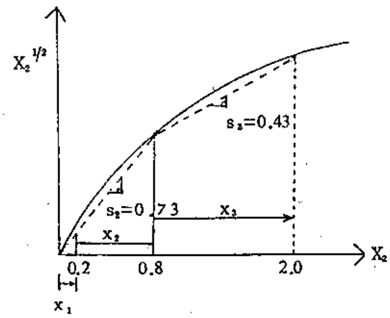


圖 3-1　Segment Variable

此處吾人將其分成三段

| | |
|---|---|
| $x_1 \leqslant 0.2$ | 各 Segment 之斜率 |
| $x_2 \leqslant 0.6$ | $s_1 = 2.25$ |
| $x_3 \leqslant 1.2$ | $s_2 = 0.73$ |
| | $s_3 = 0.43$ |

$$x_2^{1/2} = s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3$$

則原題可以改寫如下：

$$\text{obj} \quad \max Z = 2x_1 + (2.25x_1 + 0.73x_2 + 0.43x_3) - 3x_3$$

$$\text{s.t}: x_1 + 10(x_1 + x_2 + x_3) \leqslant 20$$

$$3x_1 - 2(x_1 + x_2 + x_3) + x_3 \leqslant 6$$

$$x_1 \leqslant 0.2$$

$$x_2 \leqslant 0.6$$

$$x_3 \leqslant 1.2$$

Non Negitivity　$x_1, x_1, x_2, x_3, x_3 \geqslant 0$

2. ( Method Ⅱ ) : Segment weights

只可求 max concave 或 min convex.

與上述同一例題時

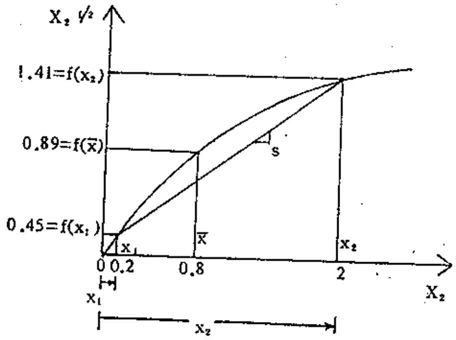


圖 3-2 Segment weights

$\bar{x} = w_1 x_1 + w_2 x_2$ $\qquad w_1 + w_2 = 1$

$f(\bar{x}) = w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2)$

$x_2 = w_0 0 + w_1(0.2) + w_2(0.8) + w_3(2.0)$

$x_2^{1/2} = w_0 0 + w_1(0.45) + w_2(0.89) + w_3(1.41)$

則原題可以改寫如下：

obj max $Z = 2x_1 + 0.45w_1 + 0.89w_2 + 1.41w_3 - 3x_3$

s.t : $x_1 + 10(0.2w_1 + 0.8w_2 + 2.0w_3) \leq 20$

$3x_1 - 2(0.2w_1 + 0.8w_2 + 2.0w_3) + x_3 \leq 6$

$w_0 + w_1 + w_2 + w_3 = 1$

Non Negitivity $x_1, x_3, w_1, w_2, w_3, w_0 \geq 0$

又本法具有二項特性：

(i) 與 ( Method I ) 比較，可知本法增加之限制式比較少。

(ii) 求出之$w_i$值中，$w_0 \sim w_4$，最多只允許有 2 個不等於零，且不為零的必屬相接續的 $w_i$ 及 $w_{i+1}$。

3. Mixed-Integer Programming ( case I )

可以求 max concave 或 max convex 也可求

min convex 或 min concave

但一次只能求單純一種

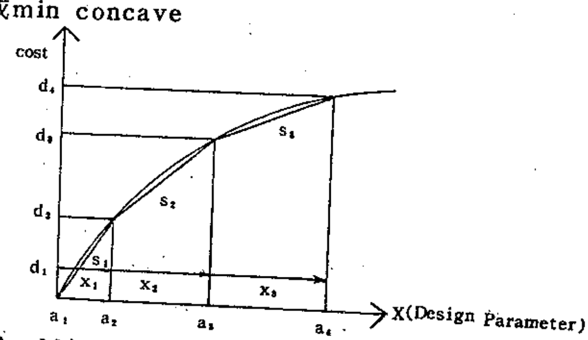


圖 3-3 Mixed-Integer programming

$$\text{Min} \quad C(x) = d_1z_1+d_2z_2+d_3z_3+d_4z_4+s_2x_1+s_2x_2+s_3x_3$$

$$\text{s.t}: \quad a_1z_1+a_2z_2+a_3z_3+a_4z_4+x_1+x_2+x_3=X$$

$$x_1 \le (a_2-a_1)z_1$$

$$x_2 \le (a_3-a_2)z_2$$

$$x_3 \le (a_4-a_3)z_3$$

$z_1,z_2,z_3,z_4 \ \left\{\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.$ 或，4個z中只能找到一個z為1，其它為0

$$z_1+z_2+z_3+z_4 \le 1$$

$$x_i \ge 0 \quad \forall_i=1,2,3$$

z與x相對應即若有$z_3$必有$\rightarrow x_3$

同樣方法可以求 max - convex function

4. ( Method Ⅳ )：

Mixed-Integer programming ( case Ⅱ )

只可求 min a concave function

或 max a convex function

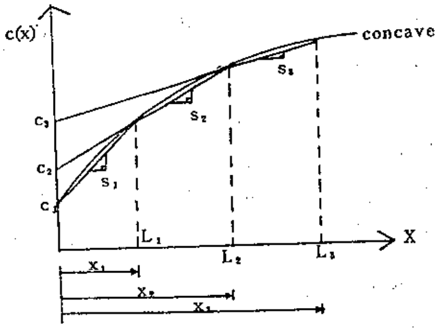


圖 3-4 Mixed Integer programming

$$\min C(x) = c_1z_1+s_1x_1+c_2z_2+s_2x_2+c_3z_3+s_3x_3$$

$$\text{s.t}: \quad z_1+z_2+z_3 \le 1$$

$$x_1 \le z_1L_1$$

$$x_2 \le z_2L_2$$

$$x_3 \le z_3L_3$$

$$x_1+x_2+x_3=X$$

$z_1,z_2,z_3 = \left\{\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.$ 或

其中$c_1$是截距

## 四、混合整數規劃：

### 4-1 整數規劃：

實際上問題的決策變數在很多情況下，只有在整數時才有意義。例如分派人、機器、車輛到各種活動時，需爲整數才有意義。這種限制條件很難用數學來處理，但利用決策變數額外限制爲整數的線性規劃，已有很大進展。整數規劃最好的解法是分枝定限法（branch-and bound technique）及切面法（cutting plane）前者較適用於大模式。

#### 4-1-1 整數規劃之分類：

1. 純整數規劃（pure integer program）；

   即在LP模式中，所有之決策變數必須爲整數。

2. 0—1整數規劃（Zero-one integer program）；

   即在LP模式中，所有之決策變數非0即1。

3. 混合整數規劃（mixed integer program）。

### 4-2 混合整數規劃：

即模式中，某些變數可以爲變數（continuous variables）某些必需爲整數。例如第三節中；Method Ⅲ 及Method Ⅳ 中之 $z_i$ 。又依不同之問題可能有下列三種情況：

1. 例如下列模式

$$\left.\begin{array}{lll} \text{obj} & \max & y_1+4y_2+2x_1+3x_2 \\ \text{s.t :} & & -y_1+3y_2-x_1+2x_2 \geqslant 2 \\ & & y_1+3y_2+x_1+x_2 \geqslant 3 \\ & & y_i \geqslant 0 \quad \text{integer,} \ i=1,2 \\ & & 1 \geqslant y_1 \geqslant 0 \\ & & 3 \geqslant y_2 \geqslant 0 \\ & & x_j \geqslant 0 \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (4\text{-}1)$$

整數變數爲 $y_i$ ，而 $y_2$ 其解可能爲3，2，1三者其中之一。

2. 另一種情況，即如Method Ⅲ 及Method Ⅳ 中所列之模式。其中整數變數 $z_i$ 值非0即1．且 $z_i$ 中僅允許一個有解（解值爲1），其它 $z_i$ 必爲0。

   即 $z_1+z_2+\cdots+z_i+z_n \leq 1$

3. 與第二種情況相似，惟一之不同之處在於，並不限制整數變數 $y_i$ 中，只有一個解值爲1其它爲0。亦即不給予 $y_1+y_2+y_i+\cdots+y_n \leq 1$ 之限制式。

## 五、模式實例：

### 5-1 確定性（定率性）LP模式應用M.I.P.時：

目標函數：

$$\min \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}(z_{ij}r_{ij}+c_{ij}x_{ij})+\sum_{\epsilon=J}\sum_{i=1}^{m}e_j(o_{ij}h_{ij}+s_{ij}y_{ij}) \cdots\cdots\cdots (5\text{-}1)$$

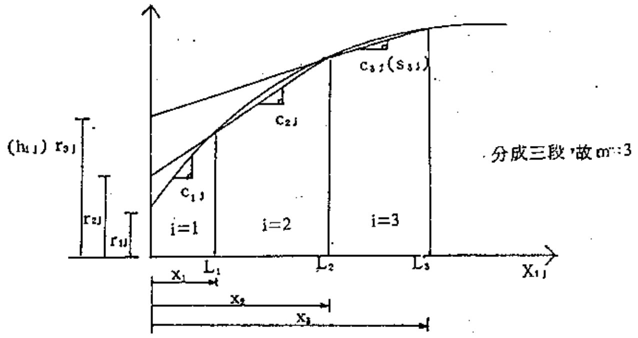


圖 5-1　目標函數圖

式中：

$r_{ij}$ ：施工成本模式中變數 j 的第 i 段 Segment 與座標軸相交得之截距，亦即是固定成本。

$z_{ij}$ ：施工成本模式中，變數 j 的第 i 段 Segment 的整數變數，其值為 1 或 0 。

$c_{ij}$ ：施工成本模式中，對變數 $x_{ij}$ 而言第 i 段 Segment 的斜率，也可以說是成本係數（價值係數） cost coefficient.

$y_{ij},x_{ij}$ ：第 j 個處理單元的 Design perameter ，（或稱第 j 個決策變數）的第 i 段 Segment 各分別為 O.M.R 及 construction 。

$h_{ij}$ ：O.M.R 成本模式中，變數 j 的第 i 段 Segment 與座標軸相交所得之截距，亦即是其固定成本。

$o_{ij}$ ：O.M.R 成本模式中，變數 j 的第 i 段 Segment 的整數變數，其值為 1 或 0 。

$s_{ij}$ ：O.M.R 成本模式中，對變數 $x_{ij}$ 而言，第 i 段 Segment 的斜率，亦即是其成本係數（價值係數）。

$e_j$ ：即在淨水廠設計年限（N年）中，每年年末支出之 O.M.R 年費，則 N 年後相當本利和。求算之 CAF（ compound Amount factor ）

S（本利和）＝R〔CAF〕

R：所有單元每年支付年 OMR cost 和 $=\Sigma\Sigma(o_{ij}h_{ij}+s_{ij}x_{ij})$

如此，則在限制式中，對某一決策變數而言，除原有各限制式外，需增加下列之限制。

施工成本：

$$\left.\begin{array}{l} z_{1j}+z_{2j}+z_{3j}\leq 1 \\ z_{1j},\ z_{2j},\ z_{3j}\ \left\{\begin{array}{l}1\\0\end{array}\right.\text{或} \\ x_1\leq z_{1j}L_1 \\ x_2\leq z_{2j}L_2 \\ x_3\leq z_{3j}L_3 \\ x_1+x_2+x_3=x \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(5-2)$$

又每一單元所選定之 $L_1$ $L_2$ $L_3$ 不一定相同，所以 $x_1$ $x_2$ $x_3$ 值亦異。

O.M.R成本：

$$\left.\begin{array}{l} o_{1j}+o_{2j}+o_{3j}\leq 1 \\ o_{1j},o_{2j},o_{3j}\ \{ {1 \atop 0} \text{或} \\ x_1' \leq o_{1j}L_1 \\ x_2' \leq o_{2j}L_2 \\ x_3' \leq o_{3j}L_3 \\ x_1'+x_2'+x_3'=x \end{array}\right\} \cdots\cdots (5\text{-}3)$$

**5-2** 序率性（不確定性）ＬＰ模式：

當吾人應用定率性ＬＰ模式時，係假定原水水質爲 constant。

**5-2-1** 進水水質之隨機性（ random input quality ）

對水處理設施的設計壽命而言，進水水質是絕不會恒定的。吾人在設計時所採用的係 constant Level（或一定之Range內），以此而爲各單元設計之根據，但實際上存有比設定水準低（亦即水質更差）的機率存在。設計者却往往大而化之，假定此機率非常小，而當實際水質比設計水準差時，限制式對出水品質而言，即會產生影響及更動。因此吾人即需對一序列的處理設施給予進水水質隨機性之設計考慮，並予建立信賴度，以滿足出水水質之要求。

在此吾人將引用 chance-constrained model 使模式中隨機性得以存在，並明確地顯示了受影響之程度。

設計者上需要掌握進水水質的累積頻率（次數）分佈，即可順利地建立一套 chance-constrained model 。

於此吾人以$\alpha$來表示影響限制式的機率，$\alpha$的選定對每一水質參數，決定了設計的水質值。設計者將需對此一選定之$\alpha$值定有信賴水準。

**5-2-2** 機遇限制線性規劃模式（ chance-constrained LP Model ）：

1. 定義：將「機率」加諸限制條件，以控制該限制條件之可靠度（ Reliability ）或風險（ Risk ），而使在此可靠度或風險度下，求得該模式之最佳解。
2. 模式型式：

$$\left.\begin{array}{l} \text{obj}: \ \min \ c\,x \\ \text{s.t}: \Pr\left[Ax \geqslant B\right] \geq p \\ \qquad x \geqslant 0 \end{array}\right\} \cdots\cdots (5\text{-}4)$$

式中：

Pr〔。〕：機率之表示型式

P　：$m\times 1$ 之常數向量，即機率值，對任一分量$P_i$，$0\leq P_i\leq 1$。

B　：某一具已知分配之隨機變數的量，分量爲$B_i$。

A　：$m\times n$ 之常數矩陣，爲限制條件中之技術係數。

X　：$n\times 1$ 之變數矩陣，即決策變數（ decesion Variables ）。

C　：$1\times n$ 之常數向量，爲目標函數之係數。

此模式內含機率型式之限制式，吾人必須將其轉換爲「確定性對等線性式」（ deterministic equivalevce ）方能符合線性規劃「確定性」之基本假設。

3. 確定性對等式之轉換：

原機率型式之限制式爲

$$Pr\{A \geqslant B\} \geqslant P \quad \cdots\cdots (5\text{-}5)$$

以累積分配函數（cumulative Distribution Function）

即C.D.F之型式表示爲

$$F_B(AX) \geqslant P \quad \cdots\cdots (5\text{-}6)$$

則其確定性對等式爲

$$AX \geqslant F_B^{-1}(P) \quad \cdots\cdots (5\text{-}7)$$

其中 $F_B^{-1}(P)$ 爲隨機變數向量B之C.D.F, $F_B(\cdot)$ 之反函數，其性質和單位均與B一致，爲資區別，可令 $b = F_B^{-1}(P)$，其關係如下圖

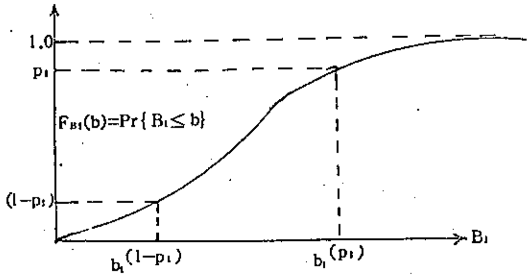


圖 5-2　隨機變數 $B_1$ 之累積機率分配函數

吾人決定採用此種模式，來表示進水水質之隨機性，肇因：

(1)加入機率可再轉化成線性，對原結構限制式而言，不增加限制式，轉化也容易。

(2)機率由decesion maker 決定，只要存足夠之體認與經驗，可以充分控制。

(3)機率給予範圍可以藉敏感度分析來調整或修正。

**5-2-3** 機週限制模式：

對目標函數而言，並不改變，因其項內並不包含有uncertainty，如同式（5-1）所示。

而限制式因含有機率，必須轉化成確定式（certainty form）才能求解。在定率性ＬＰ模式中，如果混凝對總鹼度之影響導出下式

$$A_1 - \frac{19200}{Q}x_1 - \frac{9840}{Q}x_2 \geqslant 35 \quad \cdots\cdots (5\text{-}8)$$

則當考慮機率時，若 $A_8$ = 加入明礬後水中之總鹼度。

又知，欲產生良好膠羽時總鹼度最小濃度爲 35 mg／ℓ。因此

$$Pr\{A_8 \leq 35\} \leq \alpha \quad \cdots\cdots (5\text{-}9)$$

亦即 $Pr\left\{A_1 - \frac{19200}{Q}x_1 - \frac{9840}{Q}x_2 \leq 35\right\} \leq \alpha \quad \cdots\cdots (5\text{-}10)$

式中表示混凝需要的總鹼度小於或等於 35 mg／ℓ 的機率必是非常小的。

則$\alpha$的 complementary probability“ $1-\alpha$ ”表示，$A_8 \geqslant 35mg/\ell$。上式可改寫成

$$Pr\{A_1 \le 35+\frac{19200}{Q}x_1+\frac{9840}{Q}x_2\} \le \alpha \qquad (5\text{-}11)$$

即 $$F_{A_1}(35+\frac{19200}{Q}x_1+\frac{9840}{Q}x_2) \le \alpha \qquad (5\text{-}12)$$

根據 chanced constraint 之理論，吾人必需將（5－12）式改寫成確定性之型式（certainty form）才能求解。

$$\left.\begin{array}{ll} \text{則} & \frac{19200}{Q}x_1+\frac{9840}{Q}x_2+35 \le F_{A_1}^{-1}(\alpha) \\ \text{或} & -\frac{19200}{Q}x_1-\frac{9840}{Q}x_2 \geqslant 35-F_{A_1}^{-1}(\alpha) \end{array}\right\} \qquad (5\text{-}13)$$

式中 $F_{A_1}^{-1}(\alpha)$ = marginal cumulative distribution function of input total alkalinity

$= \max\{A_1 \mid F_{A_1}(a) \le \alpha\}$ 為方程式，$F_{A_1}(a)=\alpha$ 中“ a ”的解。

## 六、結論及建議

1. 對淨水廠之最佳化設計而言，吾人建立之線性規劃模式中，目標函數係尋求施工費用及爾後操作維修成本為最小，並建立一組結構限制式，分別依設計準則、水質條件、操作條件、處理效率等，加以限制，以求得各處理單元的最佳“尺寸”（design parameter）。
2. 由於水廠之施工及 O.M.R 成本模式，未必符合線性關係，一旦呈曲線關係，吾人即必需藉 piece wise method 將目標函數轉換成線性，斯時將介入混合整數之觀念，即成為 M.I.P 模式。
3. 水廠之原水水質並非為 constant Level，實際上有其隨機性，因此必須應用 stochastic LP model 加以修正，本文使用機週限制 LP model。
4. 顧及篇幅關係，本文著重於導衍一套方法論，以為自來水規劃、設計人員實用上之參考。