

管網系統最佳化設計模式之發展與建立

林碧亮¹ 廖述良² 吳瑞賢³ 陳榮藏⁴

摘要

工程師依經驗進行自來水管網系統設計時，需嘗試以不同管線管徑組合進行水力計算，每一段管線有幾個商用管徑可供選擇，需進行多次反覆計算，同時為考慮各種供水負載以確保系統之可靠度，其設計結果與輸出資料量很大，令人難以判別選擇，亦難以求得最低之成本設計。目前在文獻上有許多最佳化模式已被發展出來，並應用最佳化之方法求解管網系統之設計問題，對於實務工程設計可提供較低建造成本之設計方案，然國內相關研究與應用較少，基於成本與效率之考量，實有進一步改善之必要。基於此，本研究乃將管網系統架構成一多階段多選項系統，茲以建立自來水配水系統規劃設計最佳化模式。求解方法乃發展一啟發式程序(Heuristic Approach)，利用界限隱式列法(Bounded Implicit Enumeration, BIE)以有效率的求解最低成本之設計方案。經案例研究顯示，建造成本較之經驗設計約可節省13%~30%左右。在不同的供水負載求解系統最低成本方案，其成本與系統總供水量成一正比關係。利用最佳化模式探討最低水頭限制之設計準則，顯示最低水頭限制與最低建造成本間存在一權衡線性關係，在設計案例中每提高或降低一公尺之水頭限制式，將需付出方案成本之1.83%~2.51%左右。

一、前言

配水管網之主要目的在將合乎衛生、適於飲用之清淨水由淨水廠輸送至給水區域內，在輸送的過程中保持足夠的水量及水壓，避免外界污染，且可應付不同時刻需水量的變化。目前台灣地區用水接管之普及率達89.2%(1996)，在管網系統

1 國立中央大學土木工程研究所博士班研究生

2 國立中央大學環境工程研究所教授

3 國立中央大學土木工程研究所副教授

4 台灣省自來水公司總工程師

規劃設計工作上，面臨現有老舊管線需予以更新之問題外，由於需水量增加，需積極開闢新水源及給水管線之配合擴增或更新，及重劃區與新市鎮等新建管網系統之建設等。自來水建設與設施改善所需之經費龐大，其規劃設計結果好壞，將影響後續之系統設置及營運管理等工作，突顯出規劃設計工作之重要性。

配水系統之規劃設計工作，須進行大量的資料處理、分析與計算工作等。目前，電腦科技的快速發展，規劃與設計工作大都可藉由電腦的龐大儲存、快速運算與強大繪圖的能力來加以完成。因而以電腦（尤其是個人電腦）配合各種應用程式與模式，將可為各專業領域提昇作業、管理與決策的效率。因此，在自來水配水系統之規劃與設計階段，利用最佳化數學模式求取最佳的管網水理演算與系統設計，已成為國內外工程規劃設計人員提高工作效率與尋求真正系統最佳設計方案的主要依據。目前國內相關最佳化規劃設計之文獻較少，主要以各種不同之管網水力模擬方法為主，包括哈弟-克勞斯法、修正哈弟-克勞斯法、最佳等似管長平衡法、牛頓-勒佛森法(Newton-Raphson Method)、動量平衡法、線性理論法與修正鮑威爾混合法等。國外除了模擬方法外則有許多應用最佳化之方法求解管網系統之設計問題，包括線性規劃，非線性規劃，動態規劃、列舉法與遺傳演算法等，各有其優劣點，在應用上因為配水管網系統的複雜特性，使得最佳化在實務應用上有部份困難。因此，本研究依實務規劃設計工作與文獻，先將管網系統中每段管線可供選用之管徑確認出來，架構成一多階段多選項之管網系統，建立並發展一符合實務工程需求之自來水管網系統設計最佳化模式，並據以撰寫成管網設計最佳化程式，以利規劃設計工作之執行，以求取最低成本的管網系統規劃設計方案。

二、方法論

1. 可行管徑範圍

在一段管線中，若其管徑(D)大小固定，在最大流速限制與最小流速限制下，可輸送一定範圍之流量，計算方程式如下：

$$Q_{max} = A \times V_{max} = 0.25 \pi D^2 \times V_{max}$$

$$Q_{min} = A \times V_{min} = 0.25 \pi D^2 \times V_{min}$$

因此事實上輸送之流量(Q)在 Q_{max} 與 Q_{min} 之間。若其欲輸送之流量或預期輸送之水量已知，則依此計算其可輸送此一流量之可行管徑範圍，方程式如下：

$$Q = A \times V_{max} = 0.25 \pi D_{min}^2 \times V_{max}$$

$$D_{min} = (4Q / \pi V_{max})^{1/2}$$

$$Q = A \times V_{min} = 0.25 \pi D_{max}^2 \times V_{min}$$

$$D_{max} = (4Q / \pi V_{min})^{1/2}$$

故在此一階段，可行管徑(D)之範圍在 D_{min} 與 D_{max} 之間，設計時選擇在此一區間之商用管徑進行試算均符合設計準則。

2. 多階段多選項系統

配水系統設計分成兩大部份即系統配置與水力設計，配置的問題在於將各個配水元件安置在所選擇的不同位置或替代的位置，而設計問題則是在配置固定後決定其最佳之大小尺寸。在配置固定的管網系統中，每條管線及附屬設施可視為一個階段，在設計時一個階段如上節所推導，均有多種尺寸的商用管徑供選擇設計，如此構成一多階段多選擇項之系統，如圖1所示。故配水系統之設計，乃是在選擇不同組合的替代元件下，在不同的負載要求下進行管網模擬，以試算系統之壓力分佈與節點水頭是否合乎設計要求。在成本的計算上，每個配水元件（包括加壓站、配水池、管線與附屬設施）可以依成本函數或施工估價表單獨計算其個別成本，故多階段多選項系統亦包含其各元件之成本，亦即在複雜的配水系統中，各元件雖在設計與模擬時相互影響與消長，但在計算其成本時，分別有其各別之成本函數，不受其它元件之干擾。

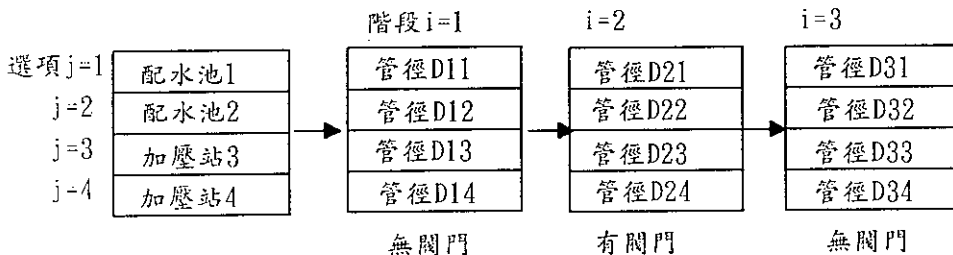


圖 1 多階段多選項配水系統圖

3. 最佳化模式之建立

由前節理論依據與實務之需求，配合各項配水元件，建立自來水配水系統規劃設計多階段多選項系統，其最佳化模式表示如下：

目標：最小建造成本(管線部份)

$$Cost = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} F_i(D_{ij})L_i X_{ij} \dots\dots\dots(1)$$

限制條件：

$$\sum_k Q_{in} - \sum_k Q_{out} = Q_k \quad k \in \text{node} \dots\dots\dots(2)$$

$$\sum_l h_l - DH_l = 0 \quad l \in \text{loop} \dots\dots\dots(3)$$

$$HMIN_k \leq H_k \leq HMAX_k \quad k \in \text{node} \dots\dots\dots(4)$$

$$VMIN_i \leq V_i \leq VMAX_i \quad i = 1, 2, \dots, n \dots\dots\dots(5)$$

$$X_{ij} = 0, 1 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \text{and} \quad j = 1, 2, \dots, m_i \dots\dots\dots(6)$$

$$\sum_{j=1}^{m_i} X_{ij} = 1 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \text{and} \quad j = 1, 2, \dots, m_i \dots\dots\dots(7)$$

$$L_i, D_i \geq 0 \dots\dots\dots(8)$$

其中：

D_i ：第*i*個階段管徑

L_i ：第*i*個階段管長

n ：管網系統中管線之數目

m_i ：第*i*階段的選擇項數

$F_i(D_{ij})$ ：系統中管線之成本函數，其為管徑 D_{ij} 之函數

- D_{ij} : 第*i*個階段，第*j*個選擇項的管徑
 Q_{in} : 節點*k*的入流量(inflow rate)
 Q_{out} : 節點*k*的出流量(outflow rate)
 Q_k : 節點*k*的需水量(demand)
 h_l : 迴路*l*之水頭損失
 DH_l : 開放迴路*l*中起始節點與最終節點之水位差
 $HMIN_k$: 在節點*k*的最小水頭限制
 $HMAX_k$: 在節點*k*的最大水頭限制
 $VMIN_i$: 在節點*i*的最小流速限制
 $VMAX_i$: 在節點*i*的最大流速限制
 X_{ij} : 第*i*個階段，第*j*個選擇項的0-1存在決定變數

4. 演算法

(1) 界限隱式列舉法(Bounded Implicit Enumeration, BIE)

BIE為改善隱式列舉法(Implicit Enumeration, IE)之效率而發展改善之方法(Chang 和 Liaw)^[6]，一般用於求解零壹整數規劃問題與多階段多選擇項(multi-stage, multi-option)系統的最佳化技巧。IE在搜尋的過程中會儲存一上限值(upper bound)來削去不能成為最佳解的系統組合。上限值是一可行組合解的目標函數值，在搜尋的過程中會不斷的更新(update)。假如整個系統的組合數目很龐大，或在IE的搜尋過程中，上限值在達到最佳解之前一直保持較高的值，則其所能削去的次系統必然較少而需要較多的搜尋時間。為改進此一現象，BIE乃將一下限值(lower bound)加到次系統上再和上限值比較，一般下限值為次系統每個階段最低成本之和。如此將可削去更多的次系統，減少需要搜尋的組合數(次系統)，因而提升了搜尋的效率。

(2) 啟發式程序

當配水管網系統以BIE求解仍需很長的時間時，為改善計算時間過長之修正做法，乃發展以啟發式程序的方法，結合BIE進行求解，啟發式演算法改進系統

求解效率，雖不保證求得系統最低成本之設計方案，但可提供可在一定時間內求得較低成本方法。其程序如下：

- a. 求解系統起始流量分佈。
- b. 基於起始流量分佈，依流速限制計算其可用之商用管徑。
- c. 依系統之大小，從每個階段可用之商用管徑中，依一定之方法篩選部份可用管徑，建立初步多階段多選項系統。
- d. 以BIE求解系統最佳解。
- e. 依初步最佳解，每階段選用較大一號與較小一號之管徑，若最佳解為最大管徑，則僅選用次大管徑，若為最小管徑，則僅選用次小管徑，以建立進一步的管線多階段多選項系統組合。
- f. 以BIE求解系統最佳解，直到最佳解收斂為止。

三、程式與研究案例

1. 程式說明

本文依據前章所述之方法論，同時考量水力模擬與最佳化設計方案，發展成一自來水管網最佳化設計程式，程式由FORTRAN語言寫成，作業系統為Microsoft Windows NT (3.51中文版)，發展平台為Microsoft FORTRAN Power Station (專業版4.0)，目前程式包括主程式和7個副程式。在實務應用上，如有擴建工程、平行管線之埋設、施工方式、管材與成本函數不同等問題，則需進一步修改程式，視實務需求而定。

2. 應用案例

為驗證最佳化模式之適用情形，本研究以四個系統案例進行比較求解。案例一^[3]節點1為淨水廠，操作水頭100M，管網包含13根管子，10個節點，如圖2所示。案例二^[4]包含12根管子4個環路的配水管網，節點進水量及取水量為已知之固定值，如圖3所示。案例三^[3]則包含14根管子4個環路，圖4中節點11為水源，其操

作水頭為固定值。案例四^[3]如圖5為台中港特定區平地系統配水管網，本例包含21根管子及7個環路的配水管網。

3. 設計準則

(1) 使用水力公式：Hazen-Williams公式。

(2) 商用管徑及最小尺寸：最小管徑採用 100mm，依次為150, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500, 600, 700, 800, 900, 1000, 1100, 1200, 1350, 1650, 1800, 2000mm共20種管徑。

(3) 設計供水量：以最大小時流量或最大日流量加上消防用水量。

(4) 設計規範：可依狀況不同，而由輸入數據修改其設計規範。

- | | |
|-----------|------------------------|
| a. 最大流速限制 | 3.0 m/sec |
| b. 最小流速限制 | 0.5 m/sec |
| c. 最大水壓限制 | 4 kg/cm ² |
| d. 最小水壓限制 | 1.5 kg/cm ² |

(5) 成本函數：案例研究所採用之管線成本函數如下⁽⁴⁾

$$COST = 5710.15 \times L \times D^{1.1} \dots\dots\dots(9)$$

式中 $COST$ ：成本(萬元)

D ：管徑，(m)

L ：管長，(m)

四、結果與討論

1. 多階段多選項系統

管網系統在實務設計時，需嘗試以不同管線管徑組合進行水力計算，每一段管線可以有幾個商用管徑可供選擇，需進行多次反覆計算，以求得較低之成本設計，本研究建立之多階段多選項系統本即基於此。表1為案例二依流速限制計算

得每段管線可用之商用管徑，亦即以1號管線而言，可選用0.25M、0.3M、0.35M、0.4M與0.5M等五種商用管徑，12段管線之系統總組合數為2,430,000，案例三及案例四之系統總組合數分別為 9.72×10^7 與 1.04×10^{15} ，如此多的系統組合，需借助最佳化模式與電腦程式之使用與執行，方可求得最低成本之設計方案。在執行程式時，輸入檔中的初始假設管徑對結果有影響，因此若能配合實務狀況予以合宜之選定，有助於求得最低成本之方案。

表 1 案例二每段管線可用之商用管徑

管線編號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
可用管線數	5	4	2	5	5	2	3	3	3	3	3	5
可用商用管線管徑	0.25	0.15	0.10	0.20	0.25	0.15	0.15	0.10	0.15	0.10	0.10	0.25
	0.30	0.20	0.15	0.25	0.30	0.20	0.20	0.15	0.20	0.15	0.15	0.30
	0.35	0.25		0.30	0.35		0.25	0.20	0.25	0.20	0.20	0.35
	0.40	0.30		0.35	0.40							0.40
	0.50			0.40	0.50							0.50
總組合數	2,430,000											

2. 不同供水負載

管網系統設計時，現行準則主要以最大時供水量或最大日供水量加上消防用水量進行設計，以確保當火災發生時或供水需求量大時，能輸送適當的水量並保持適當水壓到各接管用戶。良好之管網設計即需考慮到不同之需水負荷，在滿足壓力需求及變動的用水需求條件上確保系統之可靠度，決定其最佳或適當之設計。表2為案例不同供水負載之節點需水量，負(-)號表示節點需水量，正值則為水源供水量。表3為案例一各種不同型態供水量下最低成本設計方案，可以看出最低成本之設計方案與系統總需水量成一正比關係，由於最佳化程式有系統的搜尋最低成本之方案，所以其總需水量之大小可以很敏感的反應在最低成本之設計方案上。最大時供水型態之設計方案與最大日加上消防用水量之設計方案相差不多，在不到1%內，彼此間可做為一替代方案。以多負載供水型態做為考量時，設計方案需符合各種供水負載需求與設計準則，故對於系統內需等特殊考量之區域可予以進行考量，以求得符合需求之最低成本方案。案例一多負載供水型態為節點4與7，節點8與9發生火災時，系統需增加供給之水量所進行之最低成本設計，其與最大日供水型態之比較，設計成本約增加7.4%。

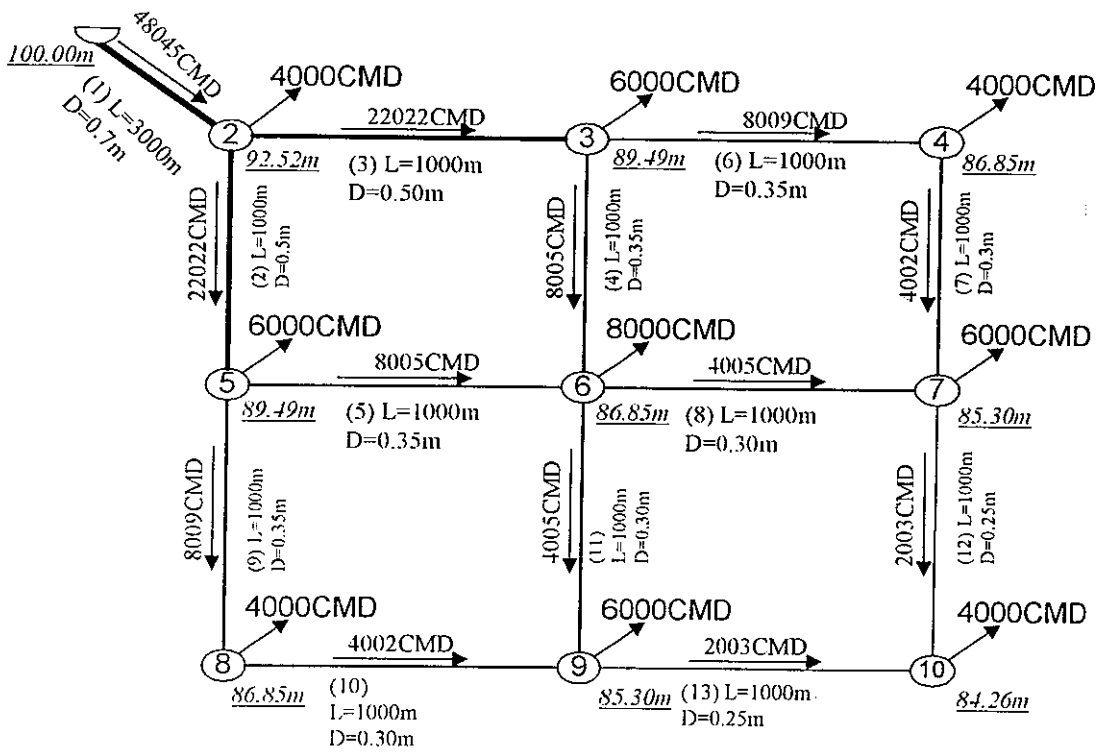


圖 2 案例一配水管網系統圖(最大日供水量=48,000CMD, C=130)

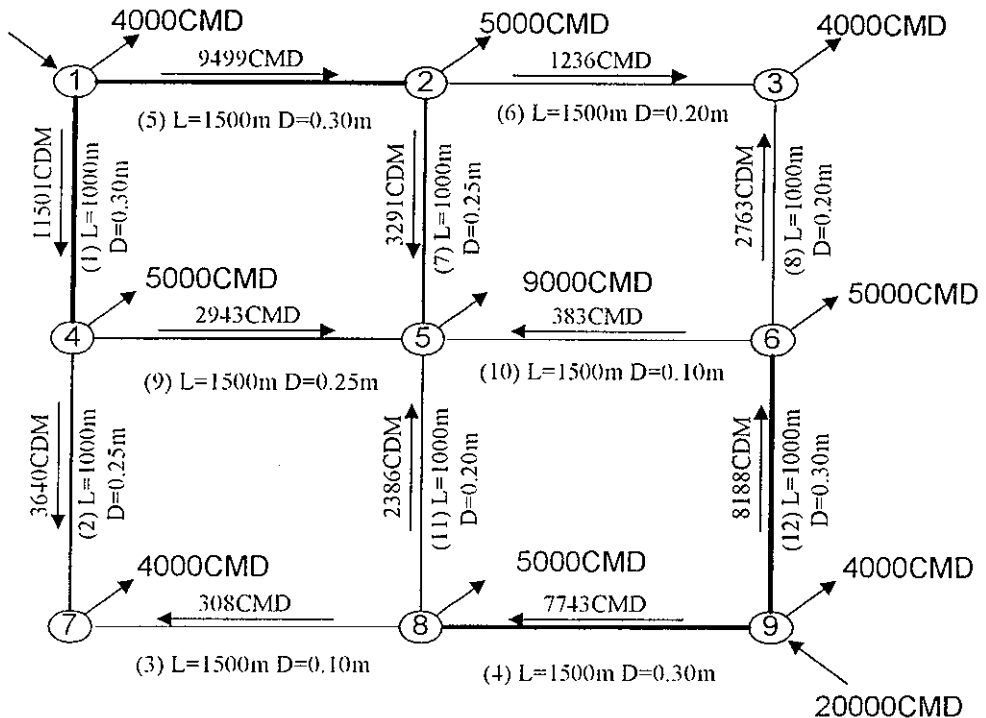


圖 3 案例二配水管網系統圖(最低成本方案=1670.7萬元)

表 2 不同供水負載之節點需水量(CMD)表

節點編號	案例一			多負載型態			案例二	案例三	案例四 最大時需水量
	最大日需水量	最大時需水量	最大日需水量 +消防 用水量	型態一	型態二	型態三			
1	48000	72000	73920	48000	53760	53760	25000 (-4000)	27000	175600 (-19500)
2	-4000	-6000	-6880	-4000	-4000	-4000	-5000	-4000	-18100
3	-6000	-9000	-8880	-6000	-6000	-6000	-4000	-5000	-15700
4	-4000	-6000	-6880	-4000	-6880	-4000	-5000	-4000	-20400
5	-6000	-9000	-8880	-6000	-6000	-6000	-9000	-5000	-6200
6	-8000	-12000	-10880	-8000	-8000	-8000	-5000	-9000	-2000
7	-6000	-9000	-8880	-6000	-8880	-6000	-4000	-5000	-4700
8	-4000	-6000	-6880	-4000	-4000	-6880	-5000	-4000	-10300
9	-6000	-9000	-8880	-6000	-6000	-8880	20000 (-4000)	-5000	-14400
10	-4000	-6000	-6880	-4000	-4000	-4000		-4000	-19200
11								18000	-14100
12									-15600
13									-3200
14									-5400
15									-6800

註：1. 供水為正，取水為負(-)。
2. 負載型態一為最大日需水量，型態二為節點4與7加上消防用水量，型態三為節點8與9加上消防用水量。

3. 最低成本方案

以最佳化程式所求解之最低成本方案與工程師經驗設計方案之成本比較，如表4所示，在使用同一成本函數估算下，最佳化程式設計方案之建造成本較之以經驗設計，案例二節省30.2%；案例三節省15.5%；而案例四節省13.3%左右，顯示最佳化程式確實可在符合設計準則之條件下，找到較為經濟之設計方案。事實上這個節省比例可隨著工程師試算之次數增加而略為減少。依設計方案之節點水頭做比較，最低成本之設計方案非常倚重最低水頭限制15公尺，以案例三為例，最低操作水頭為15.09公尺，案例一多負載型態下之最低成本設計更達15.01公尺，其它幾個案例亦有同樣之情形。最佳化程式在應用案例之管線數增加時，所需之程式執行時間增長，在PENTIUM 120 個人電腦上，案例二與案例三之執行時間在數分鐘到1小時左右即可求得最低成本方案，而案例四在求解時，約需16小時，顯示系統變大時，所需之執行時間增加。

表 3 最低成本方案之管線管徑(M)與其成本

管線編號	案例一				案例二	案例三	案例四
	最大日需水量	最大時需水量	最大日需水量 +消防用水量	多負載 型態			
1	0.7	0.8	0.8	0.7	0.3	0.6	1
2	0.5	0.5	0.5	0.6	0.25	0.5	0.6
3	0.5	0.7	0.7	0.5	0.1	0.25	0.5
4	0.2	0.5	0.5	0.3	0.3	0.1	0.15
5	0.35	0.3	0.25	0.35	0.3	0.25	0.3
6	0.35	0.3	0.3	0.35	0.2	0.5	0.3
7	0.3	0.2	0.2	0.3	0.25	0.35	0.35
8	0.2	0.35	0.4	0.3	0.2	0.2	0.8
9	0.35	0.3	0.3	0.4	0.25	0.15	0.7
10	0.3	0.2	0.2	0.3	0.1	0.2	0.3
11	0.25	0.4	0.4	0.3	0.2	0.3	0.5
12	0.2	0.25	0.25	0.2	0.3	0.2	0.25
13	0.2	0.25	0.3	0.2		0.1	0.35
14						0.35	0.25
15							0.35
16							0.15
17							0.35
18							0.35
19							0.25
20							0.3
21							0.15
最低成本 (萬元)	3046.6	3545.6	3574.1	3271.2	1670.7	3070.9	4953.2

表 4 各種供水負載下最低成本方案之節點水頭(M)

節點編號	案例一				案例二	案例三	案例四
	最大日需水量	最大時需水量	最大日需水量 +消防用水量	多負載型態			
1	35	35	35	35	38.31	35	38.4
2	27.68	26.85	26.43	25.92	19.59	26.29	36.74
3	25.44	24.78	24.18	23.25	16.5	20.58	37.25
4	21.37	19.42	18.4	20.36	20.53	15.51	28.87
5	23.91	23.77	23.61	23.88	15.33	23.79	17.89
6	20.11	20.47	19.31	19.75	25.64	15.32	22.28
7	17.91	16.77	17.08	18.46	15.39	22.16	30.41
8	20.58	19.2	17.93	20.67	22.3	17.29	35.49
9	18.14	17.94	16.6	17.55	35.12	15.09	31.53
10	15.02	15.16	15.08	15.01		27.65	22.25
11						31	15.47
12							21.42
13							22.83
14							19.69
15							15.39

4. 最小水壓限制準則

設計準則中，以在最大小時用水量時，最小動水壓 1.5kg/cm^2 (即水頭為15公尺)限制條件最重要，提高最小壓力水頭之限制，將可提高供水之穩定性，但相對的成本需提高，相反若放鬆水頭限制條件則可降低建造成本，其為一成本與水頭兩個相互權衡之問題，為了解其相互影響之大小，乃利用案例二與案例三進行其水頭與成本之關係探討。將水頭限制以一公尺之級距予以降低與提高，進行管網系統最佳化設計，以求解最低成本之設計方案，結果如表6所示，將其繪成圖6，由圖中可以看出，最低水壓限制與最佳建造成本間，大致存在一線性關係，案例二每提高或降低一公尺之水頭限制式，將需付出42萬元/公尺，與現行15公尺水頭限制之最低成本設計方案1670.7萬元相比較，約佔2.51%，案例三則約需付出56.3萬元/公尺，與現行15公尺水頭限制之最低成本設計方案3070.9萬元相比較，約佔1.83%左右。

表 5 最低成本方案與傳統設計方案成本表

	經驗設計方案值 (萬元)	最佳化程式		成本節省 比例(%)
		最低成本值 (萬元)	執行時間 (sec)	
方案二	2393	1670.7	132	30.2
方案三	3636	3070.9	4311	15.5
方案四	5710.5	4953.2	58659	13.3

表 6 改變最低水頭限制之最低建造成本表

最低水頭 限制	案例二成本(萬元)	案例三成本(萬元)
10 M	1522.3	2917.5
11 M	1549.4	2911.4
12 M	1587.4	2953.5
13 M	1605.1	2977.5
14 M	1627.9	3017.1
15 M	1670.7	3070.9
16 M	1713.4	3113.2
17 M	1778.6	3155.5
18 M	1851.8	3233.2
19 M	1909.8	3285.2
20 M		3351.7
21 M		3377.2
22 M		3474.1
23 M		3560.2
24 M		3663.8
25 M		3771.8

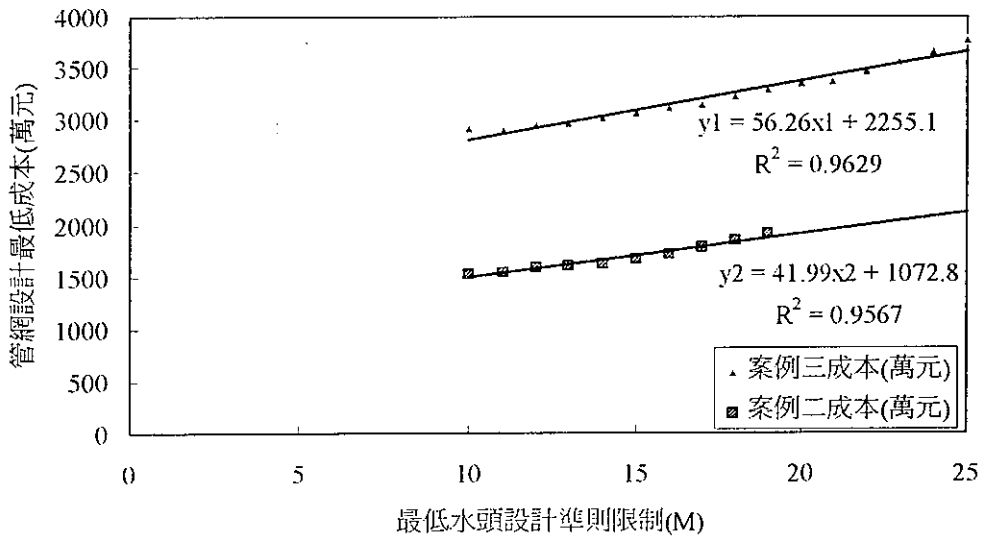


圖 6 改變最低水頭限制之建造成本圖

五、結 論

本研究發展與建立一管網最佳化設計模式，並寫成一管網設計最佳化程式，主要可供協助實務上配水系統模擬及規劃設計工作、提昇工作效率與求解符合規範之最低成本設計方案等。由於以多階段多選項系統所建立之最佳化模式，基本上與實務工程之設計之程序相同，對於各種實務工程需求，均可在此一架構下予以個別考量設計。以各案例進行比較，在符合設計規範下，最低成本設計方案與經驗設計方案比較，案例二節省30.2%；案例三節省15.5%；而案例四節省13.3%左右，對於實務工程設計與工程經費均有幫助。另外，配水管網之規劃設計除了考慮成本外，其風險度之考量為現有實務設計所缺乏之一環，因而可配合多負載供水型態之要求，考量其可能之風險，以最佳化程式執行時，其最低成本方案與系統總水量成一正比關係，故系統之風險考量亦是成本考量。最低水頭限制為最重要之設計準則，最低水頭限制與最低建造成本間之權衡，大致存在一線性關係，以案例二與案例三為例，其每提高或降低一公尺之水頭限制式，將需付出方案成本之1.83%~2.51%左右。

誌 謝

本研究承蒙中華民國自來水協會經費補助，特此致謝。

參考文獻

1. 陳榮藏，”配水管網分析方法之研討與應用”，自來水會刊雜誌，第十六期，pp.15-36，民國74年11月。
2. 葉弘德，李厚達，”大型自來水管網分析”，自來水會刊雜誌，第二十八期，民國77年11月。
3. 陳榮藏，”配水管網分析”，訓練叢書（自來水工程技術類01），臺灣省自來水員工訓練所編印，民國71年6月。
4. 林偉田，溫清光，”配水管網之佳化設計”，成功大學環境工程研究所碩士論文，民國73年8月。
5. 吳瑞賢，林永敏，”結合水力計算與線性規劃應用於自來水管網最佳化”八十四年電子計算機於土木水利工程應用論文研討會論文集，pp.1203-1214，民國84年10月，中原大學。
6. Chang, S.Y. and Liaw, S.L., "An Efficient Implicit Enumeration Algorithm for Multistage Systems," for presentation at the TIMS/ORSA Joint National Meeting, New Orleans, LA (1987).
7. May, L.W., Reliability Analysis of Water Distribution System, American Society of Civil Engineers, New York (1989).
8. Morgan, D.R., "Optimal Urban Water Distribution System," Water Resources Research, Vol. 21, No. 5, pp. 642-652 (1985).
9. Park, H. and Liebman, J.C., "Redundancy-Constrained Minimum-Cost Design of Water-Distribution Nets," Journal of Water Resources Planning and Management, Vol. 119, No. 1, pp. 83-98 (1993).
10. Sonak, V.V., and Bhave, P.R., "Global Optimum Tree Solution for Single-Source Looped Water Distribution Networks Subjected to a Single Loading Pattern," Water Resource Research, Vol. 29, No. 7, pp. 2437-2443 (1993).
11. Walski, T.M., Gessler, J. and Sjostrom, J.W., "Selecting Optimal Pipe Size for Water Distribution System," Journal of AWWA, Vol. 80, No. 2, pp. 35-39 (1988).
12. Wood, D.J. and Charles, C.D.A., "Hydraulic Network Analysis Using Linear Theory," Journal of Hydraulic Division, ASCE, Vol. 98, No. 7, pp. 1157-1170 (1972).