都市水質模式中有關污染物洗出過程之敏感度分析

SENSITIVITY ANALYSIS OF PARAMETERS IN THE WASH-OFF PROCESS IN THE STORM WATER MODELS

詹明勇　　陳俊宏

高雄工學院土木工程學系

概　述

在水資源系統，水質模式或常見濃度分析模式中，預測量或稱估計變數（因變數 Y，如濃度、洪峰、質量、體積等）都和可預估或量測容易的自變數(x)相關。Y 與 x 的關係式最常被表為非線性連乘的型式

$$Y = g(x) = a_0 x_1^{a1} x_2^{a2} x_3^{a3} \ldots x_n^{an} \tag{1}$$

若部份 x_i 值為不確定的物理量，則 Y 值會因 x_i 值的不確定性而成為不確定的因變數。由 x_i 而對 Y 的影響即稱為基本的敏感度分析。傳統的理論分析上，變數的不確定可以用其不同階次的統計動差表示。而因變數 Y 的不確定則要由各 x_i 的聯合機率分佈（ Joint Probability Density Function ， PDF ）表示。在真正分析上， PDF 的計算太複雜而困難，而且因非線性的效應，更形成推估 Y 的 PDF 有太多的數學運算。在工程分析而言，利用前面幾階的動差代表自變數與因變數的統計性質。

利用統計動差決定參數不確定性，最常見的是利用平均值二階動差法（ Mean Value First Order Second Moment ， FOSM ）推估法。 FOSM 是以平均值和變異數推算變數的不確定性，若要把推算的精度提高，則更高階的統計量必要逐一計算，也因為要逐一推算各階動差而造成 FOSM 法的缺陷。因理論的高階動差值在一般問題中並不可得，而用觀測的數據推算的高階動差又恐其偏頗（ Bias)的性質失去精準估算的目的。另一種可以近似推估不確定性的統計方法為積分轉換法，如 Fourier 轉換， Laplace 轉換， z 轉換，指數轉換。在本文中將使用另一種較罕在水資源或環工上使用的 Mellin 轉換法。設(1)式的 x_i 值為各自獨立的隨機變數，則利用 Mellin 轉換可以得到 Y 各階的解析解而不必要再作任何的假設。

統計動差與 Mellin 轉換

Mellin 轉換是利用 Z 轉換的觀念而推導出來的，為表示 Mellin 轉換與統計動差的關係，以下先敘述統計動差的特性再介紹 Mellin 轉換。

(1) 統計動差

任意變數 x 以 x_0 為中心的 r 階動差，定義為

$$m_r = E[(x - x_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - x_0)^r f(x)dx \tag{2}$$

其中 E〔 〕是期望值的運算；$f(x)$是 x 的 PDF。在一般的問題中，x_0 多以平均數 m 或原點 $x_0=0$ 為參考點。各被稱為中間點動差與原點動差。

$$\text{中點動差} \quad \mu_r = E[(x-\mu)^r] \tag{3}$$

$$\text{原點動差} \quad \mu'_r = E[(x-0)^r] \tag{4}$$

當 r=1 時，$\mu_r = \mu$；$\mu_r = 0$。如果用二項式展開，很快可得到 m_r 與 m'_r 的關係式

$$m_r = \sum_{k=0}^{r} {}_rC_k (-1)^k \mu^k \mu'_{r-k}$$

${}_rC_k$ 是組合運算子，${}_rC_k = r!\,/\,[(r-k)!k!]$。將 k=2，3，4 代入分別得到常見的統計量，

$$\text{二階動差 } m_2 = E[(x-\mu)^2] = E[x^2] - \mu^2$$

$$\text{三階動差 } m_3 = E[(x-\mu)^3] = E[x^3] - 3\mu E[x^2] + 2\mu^3$$

$$\text{四階動差 } m_4 = E[(x-\mu)^4] = E[x^4] - 4\mu E[x^3] + 6\mu^2 E[x^2] - 3\mu^4$$

二階動差恰好是變異數 $m_2 = s^2$，其餘根據定義可得到

$$\text{偏態係數 } C_s = m_3 / s^3 \tag{5}$$

$$\text{峰度係數 } C_k = m_4 / s^4 \tag{6}$$

(2) Mellin 轉換的推衍

設$f(x)$是任意函數，且任意 x 均為大於零之隨機數，則 Mellin 轉換被定義為

$$M_x(s) = M[f(x)] = \int_0^\infty x^{s-1} f(x)dx \qquad x>0 \tag{7}$$

與一般的轉換相類似，$M_x(s)$與 f(x)一對一的對應是存在的。若 f(x)被視為 x 的 PDF，則可得到

$$M_x(s) = m'_{s-1} = E[(x-0)^{s-1}] = \int_0^\infty x^{s-1} f(x)dx \tag{8}$$

$M_x(s)$恰好是對原點的 s-1 階動差。若有可積分的 f(x)，則有 $M_x(s)$進而用不同的 s 值可得到不同階次原點上的統計動差值。Mellin 轉換與 Fourier 轉換或 Laplace 轉換具有類似之運算法則。設 $z=x_1x_2$ 且 f(z)是 z 變數的 PDF，

$$f(z) = \int_0^\infty g(z/x_2)\cdot h(x_2)dx_2$$

仿照 Fourier 或 Laplace 的程序，$f(z)$的 Mellin 轉換可表為

$$M_z(s) = \int z^{S-1} f(z)dz \tag{9}$$

在 x_1，x_2非相依的前提下，上式可化開成

$$M_z(s) = \int_0^\infty x_1^{S-1} g(x_1)dx_1 \cdot \int_0^\infty x_2^{S-1} h(x_2)dx_2 = M[g(x_1)h(x_2)]$$

$$M_z(s) = M[g(x_1)h(x_2)] = M_{x_1}(s)\cdot M_{x_2}(s) \tag{10}$$

亦即在 x_1，x_2為獨立的條件下，z 的 Mellin 轉換恰可用 x_1，x_2的 Mellin 轉換線性乘積。當然 z 若為 $x_1, x_2, \ldots, x_n$的連乘積，z 的 Mellin 轉換也會是 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ Mellin 轉換的連乘積。經由這種簡易的運算，多項相乘的隨機變數，可以很快的得到不同階次的統計動差。根據 Mellin 轉換的定義與其摺合積分的特質，不同運算法則下的運算轉換列於表一。其中各 f(x)皆為滿足機率密度函數且可積之條件。

Mellin 轉換雖然有解析解的優點，但並非在任何情況都有好的結果，例如當變數 x 的指數為負值時（ x^b， $b<0$ ），則在 $s = 1 -(1/b)$ 的位置， $M_x(s)$都不能存在。這時只有在利用其它轉換求不同的動差值。

表一　　Mellin 運算轉換的性質

PDF	隨機變數	Mellin 轉換
$f(x)$	x	$M_x(s)$
$f(ax)$	x	$a^{-s}M_x(s)$
$af(x)$	x	$aM_x(s)$
$x^a f(x)$	x	$M_x(a + s)$
$f(x^a)$	x	$a^{-1}M_x(s / a)$
$f(x)$	x^b	$M_x(bs - b + 1)$
$f(x)\ g(y)$	xy	$M_x(s)M_y(s)$
$f(x)\ g(y)$	x/y	$M_x(s)M_y(2 - s)$
$f(x)\ g(y)$	ax^by^c	$a^{s-1}M_x(bs - b + 1)M_y(cs - c + 1)$

敏感度分析之原理

在工程或水質規劃時，因系統參數的不確定常需作不確定性的敏感度分析， Shannon （ 1948 ）提出敏感度分析要以各個可能的變數構成的函數為基準

$$\Pi=\Pi\ (\ x_1，x_2，...，x_n\ ) \tag{11}$$

若因變數 Y 是 x_i 的階次乘積，則其前面二階的動差可以表為

$$E[Y] = M_Y(2) = a_0 \prod_{i=1}^{k} M_{xi}(1 + a_i)$$

$$E[Y^2] = M_Y(3) = a_0^2 \prod_{i=1}^{k} M_{xi}(1 + 2a_i)$$

利用 Y 在原點一階與二階動差可得到 Y 的變異數和變動係數，

$$\mathrm{Var}(Y) = a_0^2\left[\prod_{i=1}^{k} Mx_i(1+2a_i) - \prod_{i=1}^{k} Mx_i^{\,2}(1+a_i)\right] \tag{12}$$

$$\mathrm{CV}^2(Y)=\frac{Var(Y)}{E^2(Y)}=\prod_{i=1}^{k}\left[\frac{Var(x_i^{\alpha})}{E^2(x_i^{\alpha})}+1\right]-1$$

$$=\prod_{i=1}^{k}[\mathrm{CV}^2(Y_i)+1]-1 \tag{13}$$

其中 $\mathrm{CV}(Y_i)$表示第 i 項 x 轉換量 $Y_i=x_i$ 的變動係數。在前二階統計量要看任一個 x_i 對 Y 的影響程度，可用 CV(Y)因單位 x_i 的變化所產生的變化量來推估，其中要先求任一個 Y_i 與 x_i 間 CV 值的相關式。由 $Y_i = x_i$ 利用 Mellin 轉換的工具可以求得

$$\mathrm{CV}^2(Y_i) = b_i^2\mathrm{CV}^2(x_i) \tag{14}$$

b_i 是各項動差之係數，為 a_i 的函數

$$b_i^2 = \left(\frac{Mx_i^2(2)}{Mx_i^2(1+a_i)}\right)\left(\frac{Mx_i(1+2a_i)-Mx_i^2(1+a_i)}{Mx_i(3)-Mx_i(2)}\right)$$

$\mathrm{CV}(x_i)$是 x_i 的變動係數，由變異數與平均值比值計算，

$$\mathrm{CV}^2(x_i) = \frac{\mathrm{M}x_i(3)-\mathrm{M}x_i^2(2)}{\mathrm{M}x_i^2(2)} \tag{15}$$

把上式各式代入 CV(Y)的定義，可以得到

$$\mathrm{CV}^2(Y_i) = \prod_{i=1}^{k}[\beta_i^2\mathrm{CV}^2(x_i)+1]-1 \tag{16}$$

所謂敏感度分析即指任一個變量 x_i 有一個單位變化時，變量 Y 所受到的影響。用數學方式表示即所謂的 Y 對 x_i 的偏微分，

$$H=\frac{\partial CV(Y)}{\partial CV(x_i)}=\frac{\beta_i^2 CV(x_i)[CV^2(Y)+1]}{CV(Y)[\beta_i^2 CV^2(x_i)+1]} \tag{17}$$

由上式可知 Y 與 x_i 的相互關係為 $CV(x_i)$，$CV(Y)$，b_i 的函數，而 $CV(x_i)$、b_i 又為 x_i 不同階次原點動差的組合；$CV(Y)$ 恰為 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的組合。亦即 Y 因 x_i 之變化而變化可用 x_i 不同階次原點動差的結果表示，此一結論與 Shannon 所提之觀點相同。一旦有了 x_i 的觀測點或理論分佈，則 Y 因任一個 x_i 的敏感程度即可得知。

FOSM 的敏感度分析是近似解，其利用泰勒展開式的作法取其前二項分析，

$$\begin{aligned} Y &= Y(x_i,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) \\ &= Y(\overline{x_i},\ \overline{x_2},\ \ldots,\ \overline{x_n})+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial Y}{\partial x_i}(x-\bar{x})+\cdots \end{aligned}$$

式中 $(\overline{x_i},\ \overline{x_2},\ \ldots,\ \overline{x_n})$ 為 x_i 的參考點（一般為平均值）。代入平均數與變異數的定義，

$$\begin{aligned} E[Y] &= Y(\overline{x_i},\ \overline{x_2},\ \ldots,\ \overline{x_n}) \\ Var[Y] &= \sum\left(\frac{\partial Y}{\partial x_i}\right)^2\cdot Var(x_i)+2\cdot\sum\left(\frac{\partial Y}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial Y}{\partial x_j}\right)\cdot COV(x_i,x_j)+\cdots \end{aligned}$$

其中 $COV(x_i, x_j)$ 為 x_i 與 x_j 的協變異數 (covariance)。Y 的變異係數即表為

$$CV^2(Y)=\sum a_i^2 CV^2(x_i) \tag{18}$$

而其敏感度即為

$$\frac{\partial CV(Y)}{\partial CV(x_i)}=a_i^2\frac{CV(x_i)}{CV(Y)} \tag{19}$$

$$\frac{\partial CV(Y)}{\partial CV(x_i)} = a_i^2 \frac{CV(x_i)}{CV(Y)} \qquad (19)$$

比較 Mellin 轉換的作法，FOSM 恰好缺少非線性的部份，且運算法上數學轉換法也較 FOSM 具有通用性。

水質模式敏感度分析計算例

Mellin 法用在其它工程分析方面已經有很多實例的運用，而在水質模式或水資源工程則罕見其利用的實例。本文以水質模式中推估污染物殘存比例的常見公式為例，說明法的使用，並以之與 FOSM 法作比較。

常見的都市水質模式多以 Power-linear，Michaelis-Menton 或指數法為污染物洗出量或殘餘的估計標準。Power-linear 在晴天日照較長時會有不合理的累積情形出現，而後二方法若能找到合理的參係數，會比較正確的模擬污染物洗出的情形。水質模式 STORM 或 SWMM 都利用殘存比例推估濃度或洗出的情形，

$$Y = \frac{P_{off}}{P_p} = -\frac{1}{P_p}\frac{dP_p}{dt} = R_c \cdot r^W \qquad (20)$$

Y：洗出比率
p_{off}： t 時刻之洗出量
p_p：殘餘量
w：逕流效應係數
r：逕流率(in/hr, mm/hr)
R_c：洗出係數

由於 R_c、r 和 w 會對殘存率造成影響，所以有必要依三者不同的性質分析。R_c 與 r 可直接取它的分佈討論，但 w 值則用定量的方式敘述。

在常見的 R_c 與 r 的範圍中取其為三角形分佈（圖一），R_c 值介於 4 到 50 之間，用平均數 27 為中點而構成三角形的機率分佈；逕流率則以英制的方式討論，取降雨 0.1in/hr 到 1.5in/hr 間，構成中間高為 7/10 的三角形分佈。所以在 w=1.0 時，R_c 與 r 的 Mellin 轉換分別為

$$M_{R_c}(s) = \frac{2}{529}\int_4^{27} R_c^{\,S-1}(R_c - 4)\,dR_c \qquad (21)$$

$$M_r(s)=\frac{200}{49}\int_{0.1}^{0.8} r^{s-1}(r-0.1)dr \tag{22}$$

若 $w\neq 1$ 則 $M_s(s)$ 可另作積分。把上下限代入，且用不同的 w 值可得到 Mellin 轉換的結果（表二）。

表二　Mellin 計算表

	Rc		r									
			w=1		w=1.5		w=2.0		w=2.5		w=3.0	
s	2	3	2	3	2.5	4	3	5	3.5	6	4	7
M(s)	18.92	394.56	0.566	0.348	0.441	0.226	0.348	0.152	0.279	0.104	0.226	0.073
m'_r	-	-	10.71	37.31	8.34	89.17	6.58	59.97	5.28	1.03	4.28	28.80
m_r	-	-	0	22.61	0	19.61	0	16.68	0	13.16	0	10.48
Mellin	-	-	10.71	4.75	8.34	4.42	6.58	4.08	5.28	3.63	4.28	3.24
CV	0.320		0.294		0.294		0.294		0.294		0.2942	
b2	1.000		1.000		1.878		2.956		3.894		4.974	
CV(Y)	-		0.444		0.530		0.620		0.688		0.759	

若 w 值增加時，殘留率 Y 的變動係數隨之而增加，亦即表示 w 的增加會使系統值精緻，但也產生較大不確定性。真正的不確定性分析是討因變數 Y 和各個自變數間的影響程度。就水質模式的濃度殘留率的例子而言， Y 與 R_c， r 有直接相關而求其 $\partial CV(Y)/\partial CV(R_c)$ 與 $\partial CV(Y)/\partial CV(r)$ 即可知 R_c， r 對 Y 的影響。表三是不同 w 值的條件下 CV(Y)與自變數間的結果。

在表二中僅知 w 值增加時， Y 的不確定性增加，再由表三則更明顯可以看出 w 的增加使得 Y 在 R_c 的變動成份貢獻降低，而由 r 的貢獻之成份逐漸顯著。圖二更可清楚的看到這種現象。至於 FOSM 的推算根據(19)與表二的結果即可得到 Y 對於 R_c， r 相對變動之情形(如表四)。 FOSM 相

對敏感度與 w 的關係亦繪於圖二之 case C 與 case D。從圖二可看出洗出比率 Y 不管用轉換法或動差法都有相同的趨勢，在非線性的洗出過

表三 相對變動量的分析(Mellin 分析法)

		w 值				
		1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
case A	$\frac{\partial CV(Y)}{\partial CV(R_c)}$	0.7826	0.7014	0.648	0.621	0.603
case B	$\frac{\partial CV(Y)}{\partial CV(r)}$	0.7295	1.148	1.545	1.834	2.123

表四 相對變動量的分析(FOSM 分析法)

		w 值				
		1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
case C	$\frac{\partial CV(Y)}{\partial CV(R_c)}$	0.7202	0.6038	0.5161	0.4651	0.4261
case D	$\frac{\partial CV(Y)}{\partial CV(r)}$	0.6622	1.2481	1.8968	2.6708	3.4862

程中逕流率是主要的影響因子。以 w=2.0 為例，逕流率的相對影響程度是參數 Rc 值的三倍。所以，水質模式之率定除參係數之適切估算外，較精準的逕流模式更是確保合理推估水質洗出之先決條件。

結論

本文介紹 Mellin 數學轉換用於水質、水文或水資源模式的敏感度分析。在上述的範疇中有太多的例子都屬於 Mellin 轉換法可解決的型式。由上列各節之敘述可得下列之結論。

(1)若模式或其轉換式滿足(1)式之型式即可利用 Mellin 法得到其敏感度分析之解析解。

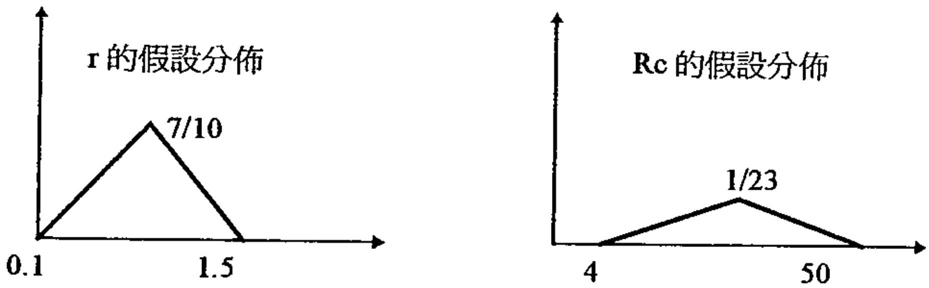
(2) Mellin 法雖可求出普遍式的解析解，但在隨機變數值小於零之情形下（枯水分析）或計算階次會預到〔1-(1/b)〕時，礙於變數變換之困難，建議仍沿用傳統之動差法分析求近

似解。

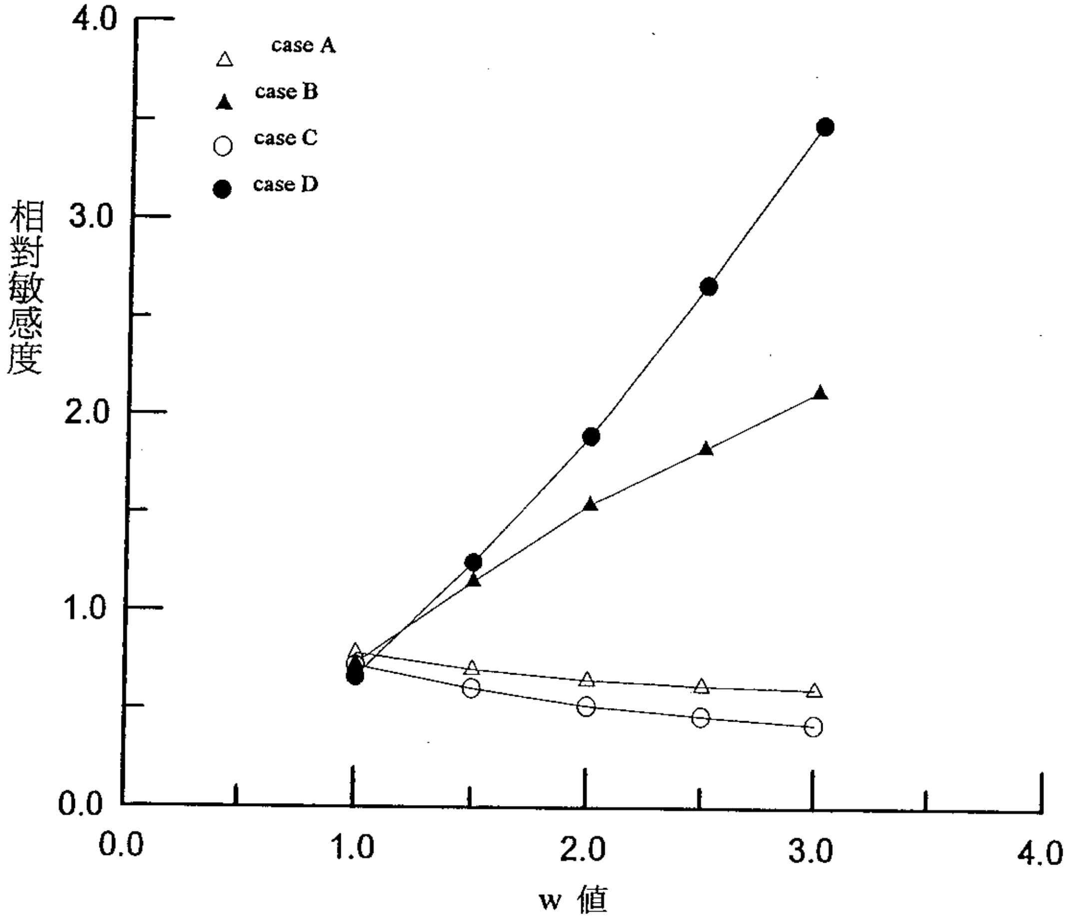
（3）類似(20)式之洗出模式，經本文之探討在合理的 Rc 與 r 值範圍內，逕流率的相對影響程度遠大於參係數 Rc 值。此驗證水質模式之良莠與其使用之逕流模式有直接之相關。

參考文獻

1. Epstein, B.:Some applications of the Mellin transform in statistics, Annals of math. Stat. 1948.
2. Harr, M. E.,:Reliability based design in civil engineering, McGraw-Hill Book Co., New york, 1987.
3. Nix, S. J.:Urban strom water modeling and simulation, Lewis Publishers, Tokyo, 1994.
4. Park, C.:The Mellin transform in probabilistic cash flow modeling, The Engr. Economist, 1987.
5. Shannon, C. E.:A mathematical theory of communication, Jour. of Bell system tech.,1948.
6. Wanielista, M. P. and Yousef, Y. A.:Storm water management, John Wiley & Sons, Inc., New york, 1993.



圖一　r 、Rc 之分佈示意圖



圖二　相對敏感度分析圖